**САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ «КОЛЛЕДЖ «КРАСНОСЕЛЬСКИЙ»**

**РАССМОТРЕНО И ПРИНЯТО**
на заседании Педагогического Совета
СПб ГБПОУ «Колледж «Красносельский»

Протокол №_9_ от _25.06_ 2020 г.

**УТВЕРЖДАЮ**
Директор СПб ГБПОУ
«Колледж «Красносельский»
______ Г.И. Софина
«___»________ 2020 г.
Приказ №___ от _25.06_ 2020 г.

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ

Сертификат: 01CD507400BBB02FAC49F694BA10A42772
Владелец: Софина Галина Ивановна
Действителен: с 25.09.2023 до 25.12.2024

# МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ

**по дисциплине**

ЕН.01 Математика

**для обучающихся по специальности**

19.02.10 Технология продукции общественного питания

Санкт-Петербург

2020 г.

## Пояснительная записка

Методические указания по организации практических занятий обучающихся составлены для специальности 19.02.10 Технология продукции общественного питания, входящей в состав укрупненной группы профессий 19.00.00 Промышленная экология и биотехнологии в соответствии с рабочей программой учебной дисциплины ЕН.01 Математика. Использование этих методических указаний должно способствовать усвоению теоретического материала.

**Целью** практических работ является обобщение, систематизация, закрепление и углубление знаний теоретического содержания учебной дисциплины и формирование у обучающихся умений применять математические методы при решении практических задач.

Для успешного выполнения практических работ обучающиеся должны владеть содержанием теоретического материала и базовыми понятиями той темы, в рамках которой выполняется практическая работа, и умениями решать математические задачи..

Практические работы обучающиеся выполняют на занятии под руководством преподавателя, оформляют в тетрадях для практических работ и предъявляют для оценивания.

## 1. Перечень практических занятий по дисциплине «Математика»

| № раздела, темы | Тема практической работы | Кол-во часов |
|---|---|---|
| Раздел 1<br>Тема 1.1 | ПЗ№1 Вычисление пределов<br>ПЗ№2 Раскрытие неопределенностей<br>ПЗ№3 Замечательные пределы. Односторонние пределы | 1<br>1<br>1 |
| Тема 1.2 | ПЗ№4 Производная обратной и неявной функции<br>ПЗ№5 Производная высших порядков<br>ПЗ№6 Исследование функции с помощью производных. Построение графиков функций | 1<br>1<br>1 |
| Раздел 2<br>Тема 2.1 | ПЗ№7 Нахождение первообразных | 1 |
| Тема 2.2 | ПЗ№8 Метод подстановки. Интегрирование дробно-рациональных и тригонометрических функций. Вычисление определенных интегралов.<br>ПЗ№ 9. Вычисление площадей и объемов. Решение физических и технических задач. | 1<br>1 |
| Раздел 3 | ПЗ№10 Обратная матрица и ее свойства. Определители. Матричная форма записи систем линейных уравнений. Решение систем линейных уравнений. Правило Крамера.<br>ПЗ№11 Решение систем с помощью обратной матрицы. Решение систем методом Жордана - Гаусса | 1<br>1 |
| Раздел 4 | ПЗ№12 Построение математической модели.<br>ПЗ№13 Методы решения задач. | 1<br>1 |
| Раздел 5 | ПЗ№ 14 Операции с множествами. | 2 |
| Раздел 6 | ПЗ№15 Определение случайной величины. Каноническое распределение случайных величин.<br>ПЗ№16 Совокупность. Функции распределения. Решение задач. | 1<br>1 |
| Раздел 7 | ПЗ№17 Решение задач по теме | 3 |
| | **Итого** | **20** |

## СПИСОК ИСТОЧНИКОВ ИНФОРМАЦИИ


1. Башмаков М.И. Математика, учебник для НПО и СПО, М., издательский центр «Академия», 2014.
2. ЭБС BOOK.ru - электронно-библиотечная система от правообладателя, ГОСТ 7.0.96-2016. Башмаков М.И. Математика, учебник 10 класс, М., издательство КноРус, 2017.
3. ЭБС BOOK.ru - электронно-библиотечная система от правообладателя, ГОСТ 7.0.96-2016. Башмаков М.И. Математика, учебник 11 класс, М., издательство КноРус, 2017.
4. ЭБС BOOK.ru - электронно-библиотечная система от правообладателя, ГОСТ 7.0.96-2016. Башмаков М.И. Математика, сборник задач, М., издательство КноРус, 2015.
5. Алимов Ш.А. Алгебра и начала анализа. Учебник для 10-11 классов общеобразовательных учреждений. М., «Просвещение», 2013.
6. Атанасян Л. С., Бутузов В. Ф., Кадомцев С. Б. и др. Геометрия, 10—11: Учеб. для общеобразовательных учреждений . М.: Просвещение, 2013.
7. ЕГЭ 2014. Математика. 3000 заданий части В с ответами. Под ред. Ященко И.В., Семёнова А.Л. и др. – М.: Издательство «Экзамен», 2013


**Критерии оценивания практических работ**

| Процент результативности (правильных ответов) | Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений | |
|---|---|---|
| | балл (отметка) | вербальный аналог |
| 86-100 | 5 | отлично |
| 66-85 | 4 | хорошо |
| 50-65 | 3 | удовлетворительно |
| менее 50 | 2 | неудовлетворительно |

## Практическое занятие № 1
## Вычисление предела последовательности

Цель:
1) Формирование общих компетенций:
ОК1. Понимать сущность и социальную значимость своей будущей профессии, проявлять к ней устойчивый интерес
ОК 2. Организовывать собственную деятельность, выбирать типовые методы и способы выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество.
ОК 3. Принимать решения в стандартных и нестандартных ситуациях и нести за них ответственность.
2) Знать определение предела последовательности, свойства пределов.
3) Уметь определять предел последовательности, использовать свойства пределов, решать прикладные задачи на определение предела последовательности.

### Краткая теория

Постоянное число А пределом функции у= f(х)в точкех=а, если для всех х, сколь угодно мало отличающихся ота, т.е. (|x-a|)<δ),значение функцииу сколь угодно мало отличается от числа А, т.е. (|y-A|<ε), т.е. если при х→ а, у→А, то$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$.

Правила предельного перехода:
1.Предел суммы или разности равен сумме или разности пределов lim(x+y)=limx+limy; lim(x-y)=limx- limy.
2.Предел произведения равен произведению пределов lim(x·y)=limx·limy
3.Предел отношения равен отношению пределов lim{x/y)=limx/limy
Свойства пределов:
1.limA=A, если A=constпредел постоянной равен этой постоянной
2. lim (C· y)=C · limy, еслиC = const постоянную можно вынести за знак предела.

**Контрольные вопросы**
1.Дайте определение предела функции.
2.Сформулируйте правила предельного перехода.
3.Каковы свойства пределов.

### Задания

1)Доходная эластичность определяется по формуле: е=$\frac{\text{Относительное изменение спроса}}{\text{Относительное изменение дохода}}$.
Относительное изменение спроса зависит от времени tпо формуле: относительное изменение спроса = $t^2$-5t+6 Относительное изменение дохода = $t^2$-6t+8
Вычислить предел эластичности при t→2

2)Вычислить предел функции:$\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-3x}$ ;$\lim\limits_{x\to 3}\frac{2x^2-18}{x^2-3x}$ ; $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-3x-4}{16-x^2}$ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{x+1}-1}$;
$\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$ $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-4x+5}{x^2+6}$ $\lim\limits_{x\to -1}\frac{(x+3)(x-2)}{x+2}$

$\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\frac{x^2-3}{x^4+x^2+1}$ $\lim\limits_{x\to -1}(x^3-x^2+1)$; $\lim\limits_{x\to 0}(3x^3+x^2-8x+10)$

**Практическое занятие № 2**

**Предел функции. Раскрытие неопределенностей.**

Цель:

1) Формирование общих компетенций:

ОК1. Понимать сущность и социальную значимость своей будущей профессии, проявлять к ней устойчивый интерес

ОК 2. Организовывать собственную деятельность, выбирать типовые методы и способы выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество.

ОК 3. Принимать решения в стандартных и нестандартных ситуациях и нести за них ответственность.

2) Знать определение предела последовательности, свойства пределов, правилами раскрытия неопределенности .

3) Уметь решать прикладные задачи на раскрытие неопределенности .

**Краткая теория**

Для раскрытия неопределенности вида необходимо предварительно дробь сократить, разложив на множители, а затем найти предел.

Пример 1

$$\lim_{x\to-\frac{3}{2}}\frac{4x^2-9}{2x+3}=\lim_{x\to-\frac{3}{2}}\frac{(2x-3)(2x+3)}{(2x+3)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}(2x-3)=-3-3=-6$$

Здесь использовалась формула: $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

Пример 2

$$\lim_{x\to5}\frac{x^2-7x+10}{x^2-9x+20}=\lim_{x\to5}\frac{(x-5)(x-2)}{(x-5)(x-4)}= \;=3$$

В этом примере используется разложение квадратного трехчлена на множители $(x-x_1)(x-x_2)$

Пример 3

$$\lim_{x\to1}\frac{x^3-1}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)}=$$

Применяли: $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

**Контрольные вопросы**

1.Какой существует прием для раскрытия неопределенности ?

2. Как разложить на множители квадратный трехчлен?

**Задания**

1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{3x^2+x}{x}$ 2) $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2-9}{x^2-2x-3}$

3) $\lim\limits_{x\to-2}\frac{x^2-4}{x+2}$ 4) $\lim\limits_{x\to3}\frac{3-x}{x^3-27}$

5) $\lim\limits_{x\to3}\frac{3x^2-11x+6}{2x^2-5x-3}$ 6) $\lim\limits_{x\to3}\frac{x-3}{x^2-9}$

**Практическое занятие № 3**

**Предел функции. Замечательные пределы. Односторонние пределы.**

Цель:

1) Формирование общих компетенций:

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности, применительно к различным контекстам.

ОК 02. Осуществлять поиск, анализ и интерпретацию информации, необходимой для выполнения задач профессиональной деятельности.

2) Знать определение предела последовательности, свойства пределов, правилами раскрытия неопределенности ∞ /∞

3) уметь решать прикладные задачи на раскрытие неопределенности ∞/∞.

Для раскрытия неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$ необходимо числитель и знаменатель разделить на x с наибольшим показателем степени.

Пример 1.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^4-x^2+2}{x^3-x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^4}}{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^4}}==\infty$$

Контрольные вопросы

1. Какой существует прием для раскрытия неопределенности $\frac{\infty}{\infty}$ ?

2. Чему равен предел отношения 1/∞ ?1/0?

**Задания**

**Вычислить:**

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+x^4}{x^5+x^6}$ 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{10x^2-x-6}{3x-x^2}$

3)Минимальный средний уровень торговой надбавки=$\frac{\text{фактический уровень издержек}}{1-\text{расчетная ставка налога на добавленную стоимость}}$

Фактический уровень издержек = $x^3+2x^2+4$ расчетная ставка налога на добавленную стоимость = $4x^3-3x^2+5$рассчитать предел при $x\to\infty$

.

4)$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+2x^2+4}{x^3-3x^2+5}$

5)$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-5x-3}{4x^2-13x+3}$; 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4-x^2+2}{x^4-x+1}$

## Практическое занятие №4-5
## Производная функции.

.

Цель:1) Формирование общих компетенций:

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности, применительно к различным контекстам.

ОК 02. Осуществлять поиск, анализ и интерпретацию информации, необходимой для выполнения задач профессиональной деятельности.

2) Знать определение производной функции, производные основных функций, правила нахождения производной сложной функции, геометрический смысл производной.

3) Уметь решать прикладные задачи на определение производной функции.

### Краткая теория

Производной функции y=f(x) по переменной хназывается предел отношения приращения функции к приращению аргумента х, когда последнее стремится к нулю, т.е. $y_x' = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$.

Процесс нахождения производной функции называется дифференцированием.

Геометрический смысл производной – тангенс угла наклона касательной к графику функции.

Дифференциалом функции y=f(x) называется главное слагаемое приращения функции, линейное относительно Δх.$y'=\frac{dy}{dx}$

*Формулы дифференцирования:*

1) C=const, $(C)'=0$; 2) $(C\cdot f(x))'=C\cdot f'(x)$;

3) $(f(x)+g(x))'= f'(x)+g'(x)$; 4) $(f(x)\cdot g(x))'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$;

5) $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f(x)'g(x)-g(x)'f(x)}{g(x)^2}$; 6) $(x^n)'=n\cdot x^{n-1}$

7) $(\sin x)'=\cos x$; 8) $(\cos x)'=-\sin x$.

Производная сложной функции: $(f(g(x)))'=f'((g(x))\cdot g'(x)$.

8) $y=x^3\cdot \cos x$, $dy=3x^2\cdot\cos x+x^3(-\sin x)$.

**Контрольные вопросы**

1.Дайте определение производной.

2.Что называют дифференцированием?

3.Каков геометрический смысл производной?

4.Чему равна производная сложной функции?

5.Дайте определение дифференциала функции.

### Задания

Найти производную функции:

1) $y=\frac{x^5+1}{x^2+1}$ ; 2) $y=x^{-5}-4x^{-3}+2x-3$ ;

3) $y=\sin^2 x$; 4) $y=2\sqrt{x}\ +\frac{3}{2\sqrt[5]{x^2}}-\frac{2}{\sqrt{x}}-\ +1$;

5) $y=\cos(x/3)$; 6) $y=(1+\sqrt{x}\,)^3$

7) Найти дифференциал функции: $y=3x^{\frac{2}{3}}-2x^{\frac{5}{2}}+x^{-3}$

## Практическое занятие № 6

## Исследование функции с помощью производной.

Цель:1) Формирование общих компетенций:

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности, применительно к различным контекстам.

ОК 02. Осуществлять поиск, анализ и интерпретацию информации, необходимой для выполнения задач профессиональной деятельности.

2) Знать алгоритм исследования функции с помощью производной

3) Уметь решать прикладные задачи на исследование функции с помощью производной..

## Теория.

Функция y=f(x) монотонно возрастает, если большему значению аргумента x соответствует большее значение функции f(x) и производная $\frac{dy}{dx}$>0. Функция монотонно убывает, если большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции производная $\frac{dy}{dx}$<0.

В точке экстремума производная функции равна нулю.

Признаки максимума: производная в точке максимума равна нулю, и в этой точке меняет знак с «плюса» на «минус»

Признаки минимума: производная в точке минимума равна нулю и меняет знак с «минуса» на «плюс»

Пример 1. Исследовать функцию $y=2x^2-3x$

А) Определим точки, в которых производная равна нулю. $y'=4x-3$

$4x-3=0$; $x_o=3/4$; точка экстремума $x_o=3/4$.

Б) Определим знак производной при x<xo. $y'(1/2)=4\cdot 1/2-3= -1<0$; $y'(x<xo)<0$.

В) Определим знак производной при x>xo. $y'(1)=4\cdot 1-3-1>0$;

$y'(x>xo)>0$.

Г) Точка экстремума x=3/4 в этой точке производная меняет знак с «-» на «+», значит в точке x=3/4 минимум. На участке (-∞; 3/4) функция убывает; на участке (3/4; ∞) функция возрастает.

Контрольные вопросы

1.Каков геометрический смысл производной функции?

2.Каков признак возрастания функции?

3.Каков признак убывания функции?

4.Каков признак минимума функции?

5.Каков признак максимума функции?

6.Чему равна производная функции в точке минимума или максимума?

## Задания

.Найти экстремумы и точки минимума и максимума, участки возрастания и убывания функции:

1) $y =x^2 – 1$; 2) $y = (1/3)x^3-(3/2)x^2-4x+6$;

3) $y=4x^2 – 12$; 4) $y=x^5$

5)$y=3x^3$ 6)$y=x^2 – 6x + 3$

7)$y=-2x^2 + 8x – 5$

**Самостоятельная работа на занятии:**

Найдите дифференциал функций:

1)$y=x^3\cos x$; 2) $y=\frac{1-x^2}{1+x}$; 3) $y=\frac{\cos x}{1-\sin x}$

Исследуйте функции и постройте их графики:

1) $Y=(1/3)x^3-9x$
2) $Y=3x^3-x$
3) $Y=2x^3-5x^2-12x+2$

4) $Y=x^4-4x^3-8x^2-1$
5) $Y=x^4+x^2/2-1$
6) $Y=x^3+3x^2-4$
7) $Y=x^4+4x^3-8x^2-5$
8) $Y=3x^4-4x^3$
9) $Y= -(1/4)x^4+2x^2$
10) $Y = -3x^5+5x^3$

**Практическое занятие № 7-8-9.**
**Нахождение первообразных. Метод подстановки. Вычисление интегралов. Вычисление площадей и объемов. Решение физических и технических задач.**

Цель:1) Формирование общих компетенций:
ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности, применительно к различным контекстам.
ОК 02. Осуществлять поиск, анализ и интерпретацию информации, необходимой для выполнения задач профессиональной деятельности.
2) Знать определение первообразной, правила вычисления интеграла, таблицу интегралов элементарных функций
3) Уметь выполнять интегрирование элементарных функций, заменой переменных, по частям.

**Краткая теория**

Первообразной функцией для выражения f(x)dxназывается функция F(x), дифференциал которой равен f(x)dx. Однако дифференциалу функции соответствует не единственная первообразная, а множество их, причем они отличаются друг от друга постоянным слагаемым.
Совокупность всех первообразных функций F(x)+C для дифференциала f(x)dx называется неопределенным интегралом и обозначается $\int f(x)dx$. Таким образом $\int f(x)dx = F(x) + C$, где f(x)dxназывается подынтегральным выражением, а C – произвольная постоянная интегрирования. Процесс нахождения первообразной называется интегрированием. Интегрирование – действие, обратное дифференцированию.
*Свойства неопределенного интеграла*:
1) дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению: $d\int f(x)dx = f(x)dx$;
2)неопределенный интеграл от дифференциала функции равен этой функции, сложенной с произвольной постоянной:
$\int dF(x) = F(x) + C$;
3) постоянную величину можно вынести за знак интеграла:
$$\int a\cdot f(x)dx = a\cdot\int f(x)dx;$$
4) интеграл суммы или разности функций равен сумме или разности интегралов: $\int[f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$.
*Формулы интегрирования:*
1) $\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$. где $n\neq-1$; 2) $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$;
3) $\int e^x dx = e^x + C$; 4) $\int sinxdx = -cosx + c$;
5) $\int cosxdx = sinx + C$.
Пример 1.
$\int \frac{x^2+1}{x}dx = \int(\frac{x^2}{x} + \frac{1}{x})dx=\int xdx+\int \frac{dx}{x} = \frac{x^2}{2} + \ln|x|+C.$

*Интегрирование способом подстановки*

Пример 2

$\int(1+x)^5dx$. Положим 1+x = z; продифференцируем это равенство:

.d(1+x)= dz; dx=dz; заменим в интеграле:

$\int(1+x)^5dx = \int z^5\,dz = \frac{z^6}{6}$ +C.

*Интегрирование по частям*

$\int f dg = f\cdot g - \int g df$

Пример 3

$\int x sinx dx$ =?

Положим $f = x$ ; $dg = sinxdx$; $df = dx$ $g = -cosx$.

*получим* $\int x sinx dx = x\cdot(-cosx) - \int(-cosx)dx = -xcosx + sinx + C$

**Контрольные вопросы**

1. Дайте определение первообразной функции.
2. Дайте определение неопределенного интеграла.
3. Что называют подынтегральным выражением?
4. Сформулируйте свойства неопределенного интеграла.
5. Допишите формулы интегрирования:

$\int x^n dx$=?; $\int \frac{dx}{x}$=?; $\int e^x dx$=?; $\int sinx dx$=?; $\int cosx dx$ =?.

**Задания**

1)$\int xdx$; 2) $\int x^4 dx$ ; 3) $\int 5dx$ ; 4) $\int(2-x)dx$ ;

5) $\int(3x - x^6)dx$ ; 6) $\int x^2(1+2x)dx$ ;

7) $\int \frac{x^2\,dx}{1+x^3}$ ; 8) $\int sin2x dx$ ; 9) $\int cos5x dx$.

10) $\int(1-x)sinx dx$

**Вычисление площади криволинейной трапеции**

Цель:1) Формирование общих компетенций:

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности, применительно к различным контекстам.

ОК 02. Осуществлять поиск, анализ и интерпретацию информации, необходимой для выполнения задач профессиональной деятельности.

2) Знать геометрический смысл определенного интеграла, алгоритм вычисления площади криволинейной трапеции.

3) Уметь вычислять площадь криволинейной трапеции

**Краткая теория**

Приращение F(b)-F(a) любой из первообразных функций F(x)+C при изменении аргумента от x=a до x=b называется определенным интегралом и обозначается: $\int_a^b f(x)dx$ .

$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, где *a*- нижний предел интеграла, *b*- верхний предел интеграла.

Для вычисления определенного интеграла $\int_a^b f(x)dx$ нужно найти соответствующий неопределенный интеграл, в полученное выражение подставить вместо x сначала верхний, а затем нижний пределы определенного интеграла и из первого результата вычесть второй.

$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$.

Пример 1

$\int_0^{\pi/3} cosx dx = sinx|_0^{\pi/3} = sin\frac{\pi}{3} - sin0 = 0{,}5$.

*Свойства определенного интеграла:*

*1)* $\int_a^b C\cdot f(x)dx = C\cdot\int_a^b f(x)dx$, где С-постоянная величина.

2) $\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

3) $\int_a^b f(x)dx$ = - $\int_b^a f(x)dx$

Площадь фигуры, ограниченной кривой y=f(x) , где f(x)>0, осьюOx и двумя прямымих=a и x=b, выражается определенным интегралом$\int_a^b f(x)dx$.

Пример 2

Определить площадь фигуры, заключенной между ветвью кривой $y=x^2$, осью Ох и прямыми x = 0, x = 3.

S = $\int_0^3 x^2 dx = \frac{x^3}{3}|^3_0 = \frac{3^3}{3}$ - = 9

**Контрольные вопросы**

1.Дайте определение определенного интеграла.

2.Как вычислить определенный интеграл?

3.Каков геометрический смысл определенного интеграла?

**Задания**

Найти определенный интеграл:

1) $\int_{1/2}^1 x^3 dx$ ; 2) $\int_0^1 (2x+1)dx$; 3) $\int_1^5 \frac{1}{x}dx$;

4) $\int_0^{\pi/3} sinxdx$ ; 5) $\int_0^{\pi/6} cos2xdx$

Вычислить площадь криволинейной трапеции, полученной между графиком функции $y=x^3$и прямымиу=0, х=2, х=4.

Вычислить площадь криволинейной трапеции, полученной между графиком функции *y=2cosx*, прямымиу*=0, x = 0, x =* $\frac{\pi}{2}$.

**Самостоятельная работа**

Вычислите интеграл:

1)∫$(2-3x)^6$dx; 2)∫sin(3x+5)dx; 3) ∫cos(5-x)dx

4)∫$\frac{x^2}{1+x^3}$dx; 5)∫dx; 6)$\int_0^3 (x+5)$dx

7)∫(3x-1)cosxdx ; 8)∫(3-2x)sinxdx; 9) ∫(lnx/x)dx;

10) ∫()dx

11) Вычислить площадь криволинейной трапеции, образованной линиями:

А)y=$x^3$; y = 0; x = 2; x = 4.

Б) y = x3+3x; y=0; x=1; x=5.

## Практическое занятие №10.
## Операции над матрицами

Цель:1) Формирование общих компетенций:

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности, применительно к различным контекстам.

ОК 02. Осуществлять поиск, анализ и интерпретацию информации, необходимой для выполнения задач профессиональной деятельности.

2) Знать определение матрицы, виды матрицы, правила выполнения действий над матрицами

3) Уметь выполнять сложение, вычитание и умножение матриц

***Ход работы:***

**Краткая теория**

Матричные модели представляют собой модели, построенные в виде таблиц (матриц).Эти модели находят широкое применение при решении плановых или экономических задач и при обработке больших массивов информации. Матрица – прямоугольная таблица чисел. Например:

| товар | Склад 1 | Склад 2 | Склад 3 |
|---|---|---|---|
| Сахар | 200 | 100 | 150 |
| Соль | 350 | 200 | 180 |
| мука | 400 | 250 | 260 |

Эти данные можно записать в виде матрицы (*)

$$\begin{matrix} 200 & 100 & 150 \\ 350 & 200 & 180 \\ 400 & 250 & 260 \end{matrix} = A \quad (*)$$

Коэффициенты при неизвестных системы линейных уравнений

3x-5y+z=14
X+3y-7z=-22
2x+y-3z=-6 можно записать в виде матрицы (**)

$$\begin{matrix} 3 & -5 & 1 \\ 1 & 3 & -7 \\ 2 & 1 & -3 \end{matrix} = A \ (**)$$

Матрица-прямоугольная таблица чисел. Любое число такого массива называется элементом матрицы. Ряд чисел, расположенных в матрице горизонтально называется строкой, а вертикально – столбцом. Количество строк – m, количество столбцов – n, если m=n – матрица квадратная

Размерность матрицы – количество элементов в ней.

$$A=\begin{matrix} a11 & a12 \\ a21 & a22 \end{matrix}$$

Воображаемая линия квадратной матрицы, пересекающая ее от $a_{11}$ до $a_{mn}$ называется главной диагональю.Квадратная матрица, в которой все элементы, кроме расположенных на главной диагонали, равны нулю, называется диагональной. Диагональная матрица, у которой все элементы, расположенные по главной диагонали – единицы, называется единичной.

Матрица, состоящая из одного столбца, называется вектор-столбцом.

Матрица, состоящая из одной строки, называется вектор-строкой.

Суммой (разностью) двух матриц А и В, имеющих mстрок инстолбцов, называется матрица, полученная в результате сложения (вычитания) одноименных элементов матриц А и В. Получаемая в результате матрицы С имеет ту же размерность m*n.

Матрицу можно умножить на число, для этого надо на это число умножить каждый элемент матрицы.

Умножение матрицы-строки на матрицу-вектор:

A=(a1, a2, a3) –вектор-строка.

$$B= \begin{vmatrix} b1 \\ b2 \\ b3 \end{vmatrix}$$ - вектор-столбец

$C=A*B = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3 = \sum_{i=1}^{3} ai \cdot bi$

Произведением двух матриц - матрицы A(m·n) на матрицу B(n·p) – называется матрицаC(m·p), каждый элемент которой вычисляется по формуле: $C_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\cdot b_{kj}$

**Контрольные вопросы**

1. Дайте определение матрицы.
2.Что называют элементами матрицы.
3.Какая матрица называется квадратной? Диагональной? Единичной? Вектор-столбцом? Вектор-строкой?
4.Дайте определение суммы матриц.
5.Сформулируйте правило умножения матрицы на число.
6.Сформулируйте правило умножения матриц.

**Задания**

1. Сложить матрицы$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$= A; $\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 5 \end{vmatrix}$ = B.

2.Вычесть из матрицы А матрицу В: А=$\begin{vmatrix} 9 & 7 \\ 8 & 6 \end{vmatrix}$; В=$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$.

3. Умножить матрицу А на матрицу В:А= $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$; В=$\begin{vmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{vmatrix}$.

4. Сложить, вычесть и умножить каждую матрицу на 5 :

А) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -8 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 8 & -5 \\ 7 & 6 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 9 & -1 & 2 \\ 6 & 3 & 1 \\ 4 & -8 & 17 \end{pmatrix}$

## Практическое занятие №11.
## Вычисление определителя матрицы

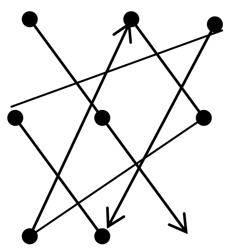
Цель:1) Формирование общих компетенций:
ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности, применительно к различным контекстам.
ОК 02. Осуществлять поиск, анализ и интерпретацию информации, необходимой для выполнения задач профессиональной деятельности.
2) Знать определение определителя матрицы, алгоритм вычисления определителя матрицы
3) Уметь вычислять определитель матрицы; решать прикладные задачи с использованием определителя матрицы.

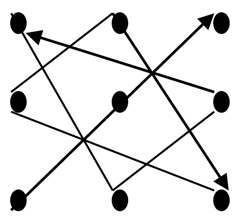
**Краткая теория**

Определитель второго порядка вычисляется по формуле:

$\Delta A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22} - a_{21}\cdot a_{12}$, результат вычисления – любое действительное число.

2) Для вычисления определителя третьего порядка (матрицы 3×3) применяют правило треугольника (Сарруса), по которому составляют формулу, аналогичную формуле пункта 1.





«+» « - »

Элементы главной диагонали и ее параллелей умножаются со знаком «плюс», элементы побочной диагонали и ее параллелей – со знаком «минус», тогда:

$$\Delta A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33}+a_{21}\cdot a_{32}\cdot a_{13}+a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31}-a_{31}\cdot a_{22}\cdot a_{13}-a_{32}\cdot a_{23}\cdot a_{11}-a_{21}\cdot a_{12}\cdot a_{33}$$

3) Для вычисления матрицы, обратной данной, необходимо:

1. Найти определитель $\Delta$ заданной матрицы по формулам пункта 1 и 2.

2. Найти алгебраические дополнения по формулам:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}, \qquad A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

3. Составить матрицу: $\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$

Транспортировать ее (строки и столбцы поменять местами)

$A^{T}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$ и найти обратную матрицу по формуле:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{21}}{\Delta} & \frac{A_{31}}{\Delta} \\ \frac{A_{12}}{\Delta} & \frac{A_{22}}{\Delta} & \frac{A_{23}}{\Delta} \\ \frac{A_{13}}{\Delta} & \frac{A_{23}}{\Delta} & \frac{A_{33}}{\Delta} \end{pmatrix}$$

4. Проверка производится по формуле:

$$A\cdot A^{-1}=E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

При решении системы уравнений по формулам Крамера необходимо:

1) Найти определитель $\Delta$ матрицы системы, которая состоит из коэффициентов при неизвестных **x, y, z**по правилу треугольника.

2) Составить матрицу-столбец свободных коэффициентов.

3) Найти определитель при первом неизвестном **(x)**. Для этого нужно вместо первого столбца матрицы системы подставить столбец свободных коэффициентов и найти $\Delta x$.

4) Аналогично определить $\Delta y$ и $\Delta z$.

5) Найти **x, y, z** по формулам $x = \frac{\Delta x}{\Delta A},\ y = \frac{\Delta y}{\Delta A},\ \ z = \frac{\Delta z}{\Delta A}$. Сделать проверку.

6) Если $\Delta = 0$, то система решений не имеет.

Пример решения системы трех линейных уравнений с тремя неизвестными по формулам Крамера

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

Коэффициенты при неизвестных составляют матрицу системы А

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, а свободные коэффициенты

матрицу – столбец $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

$\det A = \Delta$ (определитель системы)

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

Если в определителе поочередно менять столбец коэффициентов при $x_1$, $x_2$, $x_3$ на столбец свободных коэффициентов, то получим следующие определители:

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a13 \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad \Delta x_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\Delta x_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix},\ \textit{тогда}\ x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta},\ \ x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta},\ \ x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta}$$

*Решением* системы будет являться конечная последовательность чисел $c_1$, $c_2$, $c_3$, при которых каждое уравнение системы обращается в верное числовое равенство.

Особенности решения:

1) $\Delta = 0,\ \Delta x_i \neq 0,\ i = 1, 2, 3$ *система решений не имеет*

$\Delta x_{i=1,2,3} = 0$ *коэффициенты при неизвестных пропорциональны*

Система имеет множество решений.

<u>Пример 1</u>**.** Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 5x + 8y + Z = 2 & (1) \\ 3x - 2y + 6Z = -7 & (2) \\ 2x + y - Z = -5 & (3) \end{cases}$$

Решение:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 1 \\ 3 & -2 & 6 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$Z = \frac{\Delta Z}{\Delta} = \frac{107}{-107} = -1 \qquad (-3; 2; -1)$$

Проверка:

Ответ: (-3; 2; -1).

Метод Гаусса (метод исключения переменных)

1) На первом месте в системе уравнений должно стоять уравнение, коэффициент перед первым неизвестным в котором самый наименьший.

2) Исключить последовательно переменные из уравнений путем уравнения коэффициентов перед ними и алгебраического сложения.

***Пример 17:***Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x + 2y - Z = 4 & (1) \\ 2x - y + 3Z = 9 & (2) \\ x - 2y + 2Z = 3 & (3) \end{cases}$$

***Решение:***

1) Перепишем систему в виде

$$\begin{cases} x - 2y + 2Z = 3 & (1) \\ 3x + 2y - Z = 4 & (2) \\ 2x - y + 3Z = 9 & (3) \end{cases} \left| \begin{matrix} 3 \\ \\ \\ \end{matrix} \right| \begin{matrix} 2 \\ \\ \\ \end{matrix}$$

(2)-(1)·3
$$\begin{array}{l} 3x+2y-Z=4 \\ - \\ \underline{3x-6y+6Z=9} \\ 8y-7Z=-5 \end{array} \qquad (2)'$$

(3) –(1)·2
$$\begin{array}{l} 2x-y+3Z=9 \\ - \\ \underline{2x-2y+4Z=6} \\ 3y-Z=3 \end{array} \qquad (3)'$$

2) Запишем новую систему:

$$\begin{cases} x-2y+2Z=3 & (1) \\ 8y-7Z=-5 & (2)' \\ 3y-Z=3 & (3)' \end{cases} \left| \begin{array}{l} \\ 3 \\ 8 \end{array} \right.$$

$(3)'\cdot 8-(2)'\cdot 3$

$$\begin{array}{l} 24y-8Z=24 \\ - \\ \underline{2y-21Z=-15} \\ 13Z=39 \qquad (3)'' \end{array}$$

3)

$$\begin{cases} x-2y+2Z=3 & (1) \\ 8y-7Z=-5 & (2)' \\ 13Z=39 & (3)'' \end{cases} \Rightarrow Z=3, \left| \begin{array}{l} 8y-21=-5 \\ 8y=16 \\ y=2 \end{array} \right| \begin{array}{l} \\ x-2\cdot 2+2\cdot 3=3 \\ \\ x=1 \end{array}$$

***Проверка:*** $\begin{cases} 3\cdot 1+2\cdot 2-3=4 & 4=4\,(B) \\ 2\cdot 1-2+3\cdot 3=9 & 9=9\,(B) \\ 1-2\cdot 2+2\cdot 3=3 & 3=3\,(B) \end{cases}$

Ответ: (1; 2; 3).

## Практическое занятие №12
## Решение однородных дифференциальных уравнений первого порядка различными способами

Цель:1) Формирование общих компетенций:
ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности, применительно к различным контекстам.
ОК 02. Осуществлять поиск, анализ и интерпретацию информации, необходимой для выполнения задач профессиональной деятельности.
2) Знать определение однородного дифференциального уравнения, алгоритм решения однородных дифференциальных уравнений первого порядка
3) Уметь решать однородные дифференциальные уравнения

**Краткая теория**

Дифференциальные уравнения позволяют решить многие прикладные задачи.
Пример 1
При планировании товарных запасов в днях целесообразно использовать уравнение ydy=( b+$\frac{a}{x}$)dx, где y- однодневный оборот квартала; x – запасы в днях;a иb –параметры уравнения; a=20; b=40. Найти решение данного уравнения.
Решение.$\int ydy = \int (b + \frac{a}{x})$ dx;
$\frac{y^2}{2}= 40x+20\cdot ln|x|+C$
Многие дифференциальные уравнения, не являясь уравнениями с разделяющимися переменными, приводятся к ним с помощью замены переменных. К таким уравнениям относятся однородные уравнения, общий вид которых$\frac{dy}{dx}= f(\frac{y}{x})$. (*)
При решении таких уравнений делается замена переменной y по формуле$y=u(x)$, где $u$– новая переменная. Тогда
$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}x +u$, а $u = \frac{y}{x}$. Подставляя эти выражения в уравнение (*) получим$\frac{du}{dx}x+u = f(u)$, т.е. уравнение с разделяющимися переменными. Разделяя переменные получаем$\frac{du}{f(u)-u} = \frac{dx}{x}$.
Интегрирование дает Ф(u) – ln|x| = C, где Ф(u) – одна из первообразных функций функции . заменяяu=$\frac{y}{x}$ получаем
$\Phi(\frac{y}{x})-ln|x| = C$. Множество решений, даваемых этой формулой. Должно быть дополнено решениями вида $u = u_o$, если $f(u_o)-u_o = 0$, или
$y = u_o x$.
Пример 2
Решить дифференциальное уравнение $\frac{dy}{dx} =$
Решение
Разделим и числитель и знаменатель на $x^2$:
$\frac{dy}{dx} =$ = u, получим $\frac{du}{dx}$x + u = или
$\frac{du}{dx}x+u=$ , или$\frac{du}{dx}x = - u$; $\frac{du}{dx}x= \frac{u-u^2}{1+u^2}$
$Ln|\frac{u}{u^2-1}| - ln|x|=lnC; y = (y^2-x^2)C$
Линейным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида $\frac{dy}{dx}$ $=f(x)y + q(x)$, где функции $f(x)$и$q(x)$ непрерывны на интервале $(a,b)$. Если $q(x)=0$, то $\frac{dy}{dx}= f(x)y$. Решение последнего уравнения может быть в виде:$y = Ce^{F(x)}$, где$F(x)$ – первообразная функция по отношению к$f(x)$. Это же уравнение можно привести к уравнению с разделяющимися переменными.
Пример 2
Найти общее решение уравнения $\frac{dy}{dx}$ - = $(x+1)^2$
Решение
Это линейное уравнение: здесь f(x) = -q(x) = $-(x+1)^2$
Положим y = uz и продифференцируем это равенство по x:
$\frac{dy}{dx} = u\frac{dz}{dx} + z\frac{du}{dx}$; подставим теперь выражения для y и $\frac{dy}{dx}$в данное уравнение, получим $u\frac{dz}{dx} + z\frac{du}{dx} - = (x+1)^2$
Или $u\frac{dz}{dx} + z(\frac{du}{dx} - ) = (x+1)^{2}$ (*)

так как одну из вспомогательных функций uили z можно выбрать произвольно, то в качестве возьмем одно из частных решений уравнения $\frac{du}{dx}$ - = 0. Разделив в этом уравнении переменные и интегрируя, имеем $\frac{du}{u}$ - = 0; $\int\frac{du}{u} = \int\frac{dx}{x+1}$ ;*ln*|*u*| = 2 *ln*|*x*+1|;

$u = (x+1)^2$ Подставим теперь выражение для u в уравнение (*); тогда получим уравнение

$(x+1)^2\frac{dz}{dx} = (x+1)^3$ ; $\frac{dz}{dx}$ = x+1

отсюда находим $\int dz = \int(x+1)dx;$

$z = \frac{(x+1)^2}{2} + C$

Получаем общее решение

.$y = uz = (x+1)^2[\frac{(x+1)^2}{2} + C]$

$Y = \frac{(x+1)^4}{2} + C\,(x+1)^2$

**Задания**

Найти общее решение дифференциальных уравнений

1) $\frac{dy}{dx}$ + = ; 2) $\frac{dy}{dx}$ - = ; 3) $\frac{dy}{dx}$ + =

4) $(y-xy)dx + (x+xy)dy = 0$; 5)$(xy-y)dx-(x-xy)dy = 0$

6)$(y+x^2y)dx - (xy^2 - x)dy = 0$

## Практическое занятие №13
## Числовые ряды. Разложение функции в ряд Маклорена

Цель:1) Формирование общих компетенций:

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности, применительно к различным контекстам.

ОК 02. Осуществлять поиск, анализ и интерпретацию информации, необходимой для выполнения задач профессиональной деятельности.

2) Знать определение числового ряда, признаки сходимости ряда, приемы разложения функции в числовой ряд.

3) Уметь решать прикладные задачи на определение сходимости ряда, выполнять разложение функции в ряд Маклорена

### Краткая теория

Бесконечная последовательность чисел, соединенных знаком сложения $u_1+u_2+\ldots u_n$ называется числовым рядом. Выражение $u_n = f(n)$, где f(n) функция натурального аргумента, называется общим членом ряда. Запись ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ . (*)

Частные суммы ряда: $S_1=U_1$; $S_2=U_1+U_2$; $S_3=U_1+U_2+U_3$;…

$S_n=U_1+U_2+U_3+\ldots U_n$

Получилась последовательность: $S_1, S_2, S_3,\ldots S_n$

Если предел $\lim_{n\to\infty} S_n$= Sсуществует, то ряд называется сходящимся, а его сумма равна S.

Если $\lim_{n\to\infty} S_n$ , бесконечен или вовсе не существует, то ряд (*) называется расходящимся.

Пример 1

Исследовать ряд на сходимость

+ + +…+$\frac{1}{n(n+1)}$+…$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$

Решение

Надо узнать существует предел суммы членов или нет.

Представим каждый член ряда в виде $\frac{1}{k(k+1)}$ = +

Тогда сумму можно представить:

$S_n$ = (1- )+ ( - ) + ( - )+…+(- ) + ( - ) = 1 -

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$

Следовательно ряд имеет предел и поэтому является сходящимся.

Необходимым условием сходимости ряда является $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = 0$.

Достаточные признаки сходимости ряда

*– Признак Даламбера*

*Lim[(U*$_{n+1}$*)/U*$_n$*] = ρ;* если*ρ>1* – ряд расходится*:ρ<1*- ряд сходится *n→∞*

ρ=1неопределен.

*-Признак Коши*

*Lim (U*$_n$*)*$^{1/n}$*=ρ;* если*ρ>1* – ряд расходится*: ρ<1*- ряд сходится

n→∞

ρ=1неопределен.

*-Признак сравнения*: Если для рядов $U_1+U_2+U_3+\ldots U_n+\ldots$ $V_1+V_2+V_3+\ldots V_n+\ldots$ существует конечный предел

Lim ($U_n/V_n$)=K, где K>0 тогда оба ряда одновременно сходятся или

n→∞

расходятся. Исследуемый ряд сходится, если его члены не превосходят соответствующих членов другого ряда; заведомо сходящегося. Исследуемый ряд расходится, если члены превосходят соответствующие члены другого заведомо расходящегося ряда.

Пример 2

Исследовать ряд на сходимость

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{5^n}$ = + + +…++…

Решение

$\lim\limits_{n\to\infty}$ .($U_{n+1}$)/($U_n$).= $\lim\limits_{n\to\infty}$ $\frac{2(n+1)5^n}{5^n\,2n}$= <1, ряд сходится.

Пример 3

Исследовать ряд на сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$$

Решение

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \frac{\frac{n}{n}}{\frac{n}{n}+\frac{1}{n}} = 1 \neq 0$ Ряд расходится

Числовой ряд $U_1+U_2+U_3+\ldots U_n+\ldots$ (*) называется знакопеременным, если среди его членов имеются как положительные, так и отрицательные числа. Числовой ряд называется знакочередующимся, если любые два стоящие рядом члена имеют противоположные знаки.

*Признак сходимости Лейбница для знакочередующегося ряда*. Если члены знакочередующегося ряда (*) монотонно убывают по абсолютной величине и общий член Un стремится к нулю при n→∞, то ряд (*) сходится.

Знакопеременный ряд (*) называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд $|U_1|+|U_2|+U_3|+\ldots|U_n|+\ldots$(**), составленный из абсолютных величин его членов, т.е. всякий абсолютно сходящийся ряд является сходящимся.

Степенным рядом называется ряд вида

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_o + a_1x^1 + a_2x^2 + a_3x^3 + a_nx^{n+\ldots}$ (***), где числа $a_o, a_1, a_2, a_3, a_n$ называются коэффициентами ряда, а член $a_nx^n$ называется общим членом ряда.

Областью сходимости степенного ряда называется множество всех значений x, при которых данный ряд сходится. Число Rназывается радиусом сходимости ряда (***), если при |x|<Rряд сходится и притом абсолютно, а при |x|>Rряд расходится. Радиус сходимости равен пределу

$\lim\limits_{n\to\infty} |a_n/a_{n+1}|$

Рядом Тейлора функции f(x) называется степенной ряд вида

.$f(x) = f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3+\ldots$

$+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\ldots$

Если =0, то получим частный случай ряда Тейлора, который называется рядом Маклорена.

Пример 3

*Разложить функцию f(x)=cosx в ряд Маклорена*

*$/f(0)=\cos 0=1$; $f'(x) = -\sin x$; $f'(0)=-\sin 0=0$; $f''(x) = -\cos x$;*

*$f''(0) = -\cos 0=-1$; $f'''(x) = \sin x$; $f'''(0) = \sin 0=0;\ldots$*

$f(x)=1+\frac{0}{1!}x+\frac{-1}{2!}x^2+\frac{0}{3!}x^3+\ldots$

$f(x) = 1-\frac{x^2}{2!}-\frac{x^4}{4!}-\ldots$

**Контрольные вопросы**

1.Дайте определение числового ряда.

2.Каков необходимый признак сходимости числового ряда? Дайте его определение.

3.Сформулируйте достаточные признаки сходимости ряда.

4.Какой ряд называется знакопеременным? Знакочередующимся?

5.Каковы признаки сходимости знакочередующегося ряда?

6.Дайте определение степенного ряда.

7.Что называют областью сходимости степенного ряда?

8. При каком условии степенной ряд сходится?

9.Запишите общий вид ряда Тейлора и ряда Маклорена.

Задания

Исследуйте ряд на сходимость

1)$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2n^2+1}$ 2)$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2}$ 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n-1}$

Разложите функцию в степенной ряд Маклорена

1) $f(x) = \sin x$ 2)$f(x)=2x^5+3x^4+4x^3+8x^2+6x+3$

## Практическое занятие № 14
## Операции над множествами

Цель:1) Формирование общих компетенций:

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности, применительно к различным контекстам.

ОК 02. Осуществлять поиск, анализ и интерпретацию информации, необходимой для выполнения задач профессиональной деятельности.

2) Знать определение множества, действия над множествами

3) Уметь решать прикладные задачи на применение теории множеств.

### Краткая теория

Любая совокупность, объединение некоторых объектов произвольной природы, называемых элементами, называется множеством. Или, множеством называется совокупность некоторых элементов, объединенных каким-либо общим признаком. Элементами множества могут быть числа, фигуры, предметы, понятия и т.п Множества обозначаются прописными буквами, а элементы – строчными. Запись $a\in A$ обозначает, что $a$ элемент множестваА. Если $b$ не принадлежит множеству А, то записывается: $b\notin A$

Если каждый элемент множества А является и элементов множества В, то говорят, что множество А является подмножеством В ($A \subseteq B$)

Если при этом в множестве B есть элементы, не принадлежащие множеству A, то пишут A ⊂B. Сумма двух множеств A∪ B является множеством, каждый элемент которого принадлежит либо к A либо к B. Пересечением двух множеств A ∩B является множество, каждый элемент которого принадлежит как множеству A, так и множеству B.
Множество, состоящее из некоторого натурального числа элементов, называется конечным множеством. Если не существует такого числа, определяющего количество элементов в множестве, то такое множество называется бесконечным.
N –множество натуральных чисел; Zмножество целых чисел; R- множество действительных чисел; Q- множество рациональных чисел. важные операции, которые можно производить с двумя множествами A и B – объединение двух множеств и построение их пересечения.
Объединение двух множеств – новое множество, состоящее из элементов как множества A, так и множества B. Это множество обозначается A∪ B
Пересечением двух множеств называется множество, в которое входят только те элементы, которые одновременно принадлежат обоим множествам A и B. Обозначается это множество через A ∩ B
Операции объединения и пересечения можно производить с любым конечным числом множеств, а также - и с бесконечным числом.

.

Множества обозначаются прописными буквами, а элементы множество строчными буквами. Элементы множеств заключаются в фигурные скобки.

Если элемент x принадлежит множеству X, то записывают x ∈ X (∈ — принадлежит).

Если множество A является частью множества B, то записывают A ⊂ B (⊂ — содержится).

Множество может быть задано одним из двух способов: перечислением и с помощью определяющего свойства.

Два множества A и B равны (A=B), если они состоят из одних и тех же элементов.

Например, если A={1,2,3,4}, B={3,1,4,2} то A=B.

Объединением (суммой) множеств A и B называется множество A ∪ B, элементы которого принадлежат хотя бы одному из этих множеств.

*Например*, если A={1,2,4}, B={3,4,5,6}, то A ∪ B = {1,2,3,4,5,6}

Пересечением (произведением) множеств A и B называется множество A ∩ B, элементы которого принадлежат как множеству A, так и множеству B.

*Например*, если A={1,2,4}, B={3,4,5,2}, то A ∩ B = {2,4}

Разностью множеств A и B называется множество AB, элементы которого принадлежат множеству A, но не принадлежат множеству B.

*Например*, если A={1,2,3,4}, B={3,4,5}, то AB = {1,2}

Симметричной разностью множеств A и B называется множество A Δ B, являющееся объединением разностей множеств AB и BA, то есть A Δ B = (AB) ∪(BA).

*Например*, если A={1,2,3,4}, B={3,4,5,6}, то A Δ B = {1,2} ∪ {5,6} = {1,2,5,6}

*Свойства:*

Свойства перестановочности:
A ∪ B = B ∪ A
A ∩ B = B ∩ A
Сочетательное свойство:
(A ∪ B) ∪ C = A ∪ (B ∪ C)
(A ∩ B) ∩ C = A ∩ (B ∩ C)

Круги Эйлера (Эйлера-Вена) — геометрическая схема, с помощью которой можно изобразить отношения между подмножествами, для наглядного представления.

*Пример*: Среди школьников шестого класса проводилось анкетирование по любимым мультфильмам. Самыми популярными оказались три мультфильма: «Белоснежка и семь гномов», «Губка Боб Квадратные Штаны», «Волк и теленок». Всего в классе 38 человек.

«Белоснежку и семь гномов» выбрали 21 ученик, среди которых трое назвали еще «Волк и теленок», шестеро – «Губка Боб Квадратные Штаны», а один написал все три мультфильма. Мультфильм «Волк и теленок» назвали 13 ребят, среди которых пятеро выбрали сразу два мультфильма. Сколько человек выбрали мультфильм «Губка Боб Квадратные Штаны»?

*Решение*: В этой задаче 3 множества, из условий задачи видно, что все они пересекаются между собой. Получаем такой чертеж:

Учитывая условие, что среди ребят, которые назвали мультфильм «Волк и теленок» пятеро выбрали сразу два мультфильма, получаем:

21 – 3 – 6 – 1 = 11 – ребят выбрали только «Белоснежку и семь гномов».

13 – 3 – 1 – 2 = 7 – ребят смотрят только «Волк и теленок».

Получаем:

38 – (11 + 3 + 1 + 6 + 2 + 7) = 8 – человек смотрят только «Губка Боб Квадратные Штаны».

Делаем вывод, что «Губка Боб Квадратные Штаны» выбрали 8 + 2 + 1 + 6 = 17 человек.

Ответ. 17 человек выбрали мультфильм «Губка Боб Квадратные Штаны».

**Контрольные вопросы**

1.Дайте определение понятия множества.

2.Что такое подмножество?

3.Дайте определение суммы множеств.

4.Что называют пересечением множеств?

5.Какое множество называется конечным? Бесконечным?

**Задания**

1) Найти множества $A \cap B$, $A \cup B$, $A/B$, $B/A$, если:

а) $A=\{e, o, p, x\}$ $B=\{x, y\}$

б) $A=\{x: -3<x<4\}$ $B=\{x: 0\leq x\leq 6\}$

в) $A=\{2n+1\}$, $B=\{n+1\}$ $n\in N$

2) Найти множества $A \cap B$, $A \cup B$, $A/B$, $B/A$, если:

а) $A=\{12, 13, 14, 15\}$ $B=\{12, 14, 16\}$

б) $A=\{x: 0<x<2\}$ $B=\{x: 1\leq x\leq 4\}$

в) $A=\{3-(n+1)\}$, $B=\{n+5\}$ $n\in N$

3) На 1 курсе учатся 200 студентов, 106 из них знают английский язык, 60 – немецкий, 92 – французский. 24 студента знают английский и немецкий языки, 36 – английский и французский, 30 – немецкий и французский, 14 – все три языка. Остальные знают только один испанский язык. Сколько студентов знают:

а) только один язык?

б) испанский язык?

в) только немецкий язык?

г) знают английский и немецкий, но не знают французский?

4) На 1 курсе учатся 200 студентов, 106 из них знают английский язык, 60 – немецкий, 92 – французский. 24 студента знают английский и немецкий языки, 36 – английский и французский, 30 – немецкий и французский, 14 – все три языка. Остальные знают только один испанский язык. Сколько студентов знают:

а) ровно два языка?

б) только французский язык?

в) знают немецкий и французский, но не знают английский?

г) не знают испанский язык?

## Практическое занятие № 15
## Определение случайной величины. Сложение и умножение вероятностей. Решение задач.

### Краткая теория

Изучение явлений связано с выполнением некоторых условий, или испытаний. Всякий результата или исход испытания называется событием. События А, В называются несовместимыми, если в условиях испытаний каждый раз возможно появление только одного события. События А и В называются совместимыми, если в данных условиях появление одного из этих событий не исключает появление другого при том же испытании. Событие называется случайным, если исход испытания приводит либо к появлению, либо к не появлению этого события. М – число появления некоторого события; N- число испытаний.

$\frac{M}{N}$– частность. Вероятность – мера объективной возможности появления события. За появление события принимается величина, около которой группируются наблюдаемые значения частности.

Под вероятностью Р(А) наступления события принимается отношение числа исходов, благоприятствующих наступлению данного события, к числу исходов испытания. Вероятность – устойчивая частность. $P(A)=\frac{m}{n}100\%$

*Теорема сложения вероятностей*. Вероятность наступления одного из нескольких несовместимых событий без указания какого именно, равно сумме вероятностей этих событий.

*Теорема умножения вероятностей*. Вероятность совместного наступления двух событий равна произведению вероятности наступления первого события на условную вероятность наступления второго события, вычисленную в предположении, что первое событие имеет место.

Пример 1. В ящике 20 шаров, среди которых 8 белых. Какова вероятность появления белого шара Р(А)?

. m=8; n=20. $P(A)=\frac{m}{n}100\%=100\%=40\%$

Пример 2. Поездка пассажиров с некоторой трамвайной остановки к месту работы обслуживаются маршрутами №3 и №11. Через данную остановку проходят трамваи пяти маршрутов. Известно, что из 40 трамваев 8 – маршрута №3, 10 – маршрута №11. Найти вероятность того, что первый проходящий трамвай будет соответствовать требуемому маршруту.

.$m_1=8$ $m_2=10$ $n=40$ $P(№3, №11)=\frac{m1}{n} * \frac{m2}{n} * 100\%=100\%=8\%$

Пример 3. В одной урне 10 шаров, из которых 5 белых, в другой – 12 шаров, из которых 8 белых. Найти вероятность того, что при одном испытании будут выбраны одновременно из первой и второй урны два шара одновременно.

.$m_1=5$ $n_1=10$ $m_2=8$ $n_2=12$ $P(AB)=P(A)*P(B) =\frac{m1}{n1}*\frac{m2}{n2}*100\%$

$P(AB)=**100\%=\frac{40}{120}*100\%\approx33\%$

**Контрольные вопросы**

1.Что называют испытанием? Событием?

2.Какое событие называется случайным?

3.Дайте определение вероятности.

4.Сформулируйте теорему сложения вероятностей.

5.Сформулируйте теорему умножения вероятностей.

## Задания

1. Из 10 билетов лотереи выигрышными являются два. Какова вероятность того, что среди взятых наудачу пяти билетов два выигрышных**?**
2. Восемь различных книг расставляют наугад на одной полке. Какова вероятность того, что две определенные книги окажутся рядом?
3. В партии из 12 деталей имеется 9 стандартных. Найдите вероятность того, что среди семи взятых наугад деталей 6 стандартных.
4. Брошена игральная кость. Какова вероятность того, что выпадет не менее двух очков?
5. Из 50 электролампочек имеется 4 бракованных. Какова вероятность того, что две взятые наугад лампочки окажутся бракованными?

6. В книжном магазине на полке лежит 20 книг, причем 10 книг стоят по 200 руб. каждая, 3 книги - по 400 рублей и 7 книг – по 100 рублей. Найти вероятность того, что взятые наугад две книги стоят 300 рублей.
7.В магазин поступала партия товара в количестве 100 штук, которая содержит 10 штук бракованного товара. Какова вероятность того, что покупатель выберет две штуки товара и обе бракованные?
8. В магазин поступило несколько 20 партий товара. Из них две – товары фирмы А, 3- фирмы Б, остальные товары фирмы С. Какова вероятность того, что первые две продажи выпадет на товары фирмы С?

## Практическое занятие № 16
## Случайная величина, её функция распределения

Цель:1) Формирование общих компетенций:
ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности, применительно к различным контекстам.
ОК 02. Осуществлять поиск, анализ и интерпретацию информации, необходимой для выполнения задач профессиональной деятельности.
2) Знать определение функции распределения случайной величины, математического ожидания и дисперсии случайной величины.
3) уметь решать прикладные задачи на использование функции распределения случайной величины.

### Краткая теория

Качественный результат случайного эксперимента – случайное событие. Любая количественная характеристика, которая в результате случайного эксперимента может принять одно из некоторого множества значений – случайная величина. Случайной величиной называется действительная числовая функция ξ =ξ(ω), ω Œ Ω, такая, что при любом действительном x {ω$ ξ(ω)} Œ Z.
Пример случайной величины – число очков, выпавших при бросании игральной кости – дискретная случайная величина. Скорость молекул газа – непрерывная случайная величина.
Если ξ – случайная величина, то $f(x)=f_\xi(x)=P(\xi<x)$ называется *функцией распределения случайной величины.* $P(\xi<x)$ вероятность того, что случайная величина ξ принимает значение меньше X.
Функция распределения обладает свойствами:

1) f(x) – определена на всей числовой прямой R
2) f(x) не убывает, т.е. если $x_1<x_2$, то $f(x_1)<f(x_2)$
3) $f(-\infty)=0$; $f(+\infty)=1$, т.е. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1$;

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$

4) *f(x)* непрерывна справа, т.е. $\lim\limits_{x\to x0} f(x) = f(xo)$

Функция распределения дискретной случайной величины имеет вид: $x_1<x_2<x_3<\ldots$
I 0 при $x<x_1$
I $P_1$при $x<x_2$
F(x)= I $P_1+P_2$ при $x<x_3$
I …
I 1 при $x>x_n$

Функция распределения непрерывной случайной величины имеет вид: $f_\xi(x)=\int_{-\infty}^{x} P_\xi(t)dt$; $P_\xi(x)=df_\xi(x)/dx$

Отсюда $\int_{-\infty}^{\infty} P(x)dx = 1$

### Контрольные вопросы

1.Приведите пример случайной величины.
2.Что называют функцией распределения случайной величины?
3.Дайте определение математического ожидания случайной величины.
4.Дайте определение дисперсии случайной величины.

### Задания

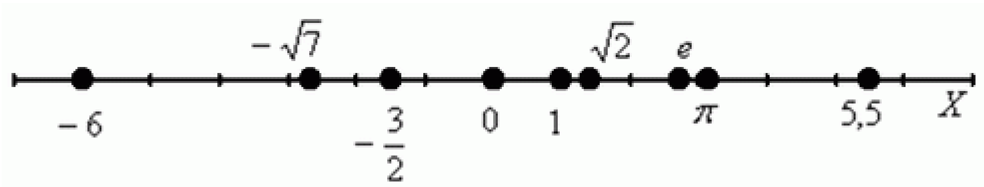
1.Построить график функции распределения случайной дискретной величины – выбор из урны, в которой находятся разноцветные шары
2.Изобразить, в общем виде, график распределения плотности вероятности непрерывной случайной величины.
3.Изобразить приблизительной график распределения скорости молекул идеального газа.
4.Изобразить приблизительно график распределения количества продаж от производителя товара. Для какого производителя вероятность максимальных продаж наибольшая?

## Практическое занятие №17. Действия над комплексными числами

Цель:1) Формирование общих компетенций:
ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности, применительно к различным контекстам.
ОК 02. Осуществлять поиск, анализ и интерпретацию информации, необходимой для выполнения задач профессиональной деятельности.
2) Знать определение определителя комплексного числа, алгоритм действий над комплексными числами
3) Уметь выполнять сложение, вычитание, умножение и деление комплексных чисел

### Краткая теория

Сначала вспомним «обычные» школьные числа. В математике они называются **множеством действительных чисел** и обозначаются буквой $\mathbf{R}$ (в литературе, рукописях заглавную букву «эр» пишут жирной либо утолщённой). Все действительные числа сидят на знакомой числовой прямой:




Здесь и целые числа, и дроби, и иррациональные числа. При этом каждой точке числовой обязательно соответствует некоторое действительное число.

Комплексным числом $z$ называется число вида $Z=a+bi$, где $a$ и $b$ – действительные числа, $i$ – так называемая *мнимая единица*. Число $a$ называется *действительной частью* $Rez$ комплексного числа Z , число b называется *мнимой частью* $Imz$ комплексного числа $z$ .

a+bi – это ЕДИНОЕ ЧИСЛО, а не сложение. Действительную и мнимую части комплексного числа, в принципе, можно переставить местами Z=a+bi: или переставить мнимую единицу:

Z=a+bi – от этого комплексное число не изменится. **Но стандартно комплексное число принято записывать именно в таком порядке**: Z=a+bi

Чтобы всё было понятнее, сразу приведу геометрическую интерпретацию. Комплексные числа изображаются на *комплексной плоскости*:
**Множество** же **комплексных чисел** принято обозначать «жирной» или утолщенной буквой $\mathbf{C}$. Поэтому на чертеже следует поставить букву $\mathbf{C}$, обозначая тот факт, что у нас комплексная плоскость/ Комплексная плоскость состоит из двух осей: Rez – действительная часть; Imz- мнимая часть.

Правила оформления чертежа практически такие же, как и для чертежа в декартовой системе координат. По осям нужно задать размерность, отмечаем: ноль; единицу по действительной оси; мнимую единицу $i$ по мнимой оси.
Построим на комплексной плоскости следующие комплексные числа:

$z_1 = 0$, $z_2 = -3$, $z_3 = 2$

$z_4 = i$, $z_5 = -\sqrt{3}i$, $z_6 = 4i$

$z_7 = 2 + 3i$, $z_8 = -4 + i$, $z_9 = -3 - 3i$, $z_{10} = \sqrt{2} - i$

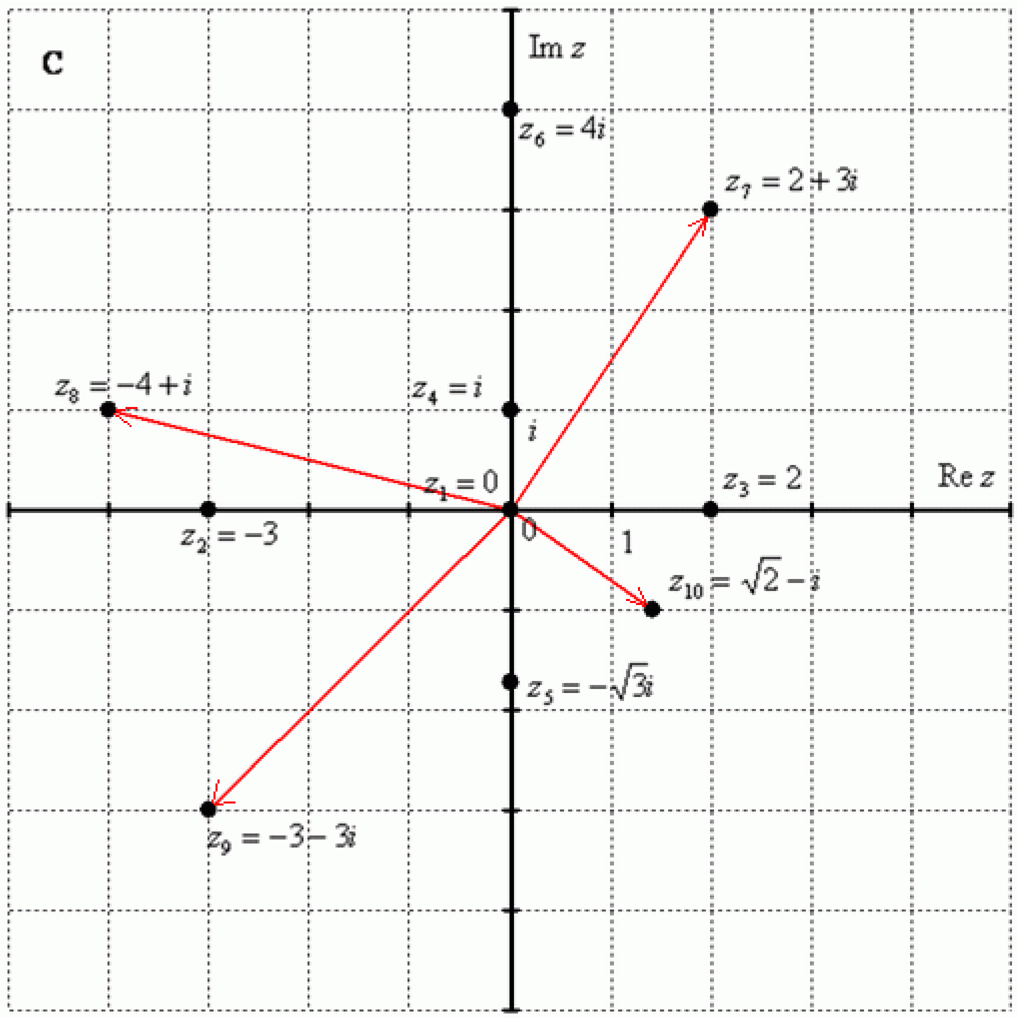



Рис.5.1.
Рассмотрим следующие комплексные числа: $z_1=0$; $z_2= -3$; $z_3= 2$ – это комплексные числа с нулевой мнимой частью. Они располагаются строго на действительной оси Rez

Числа $z_4 = i$; $x_5 = -\sqrt{3}\,i$; $z_6 = 4i$, – это, наоборот, чисто мнимые числа, т.е. числа с нулевой действительной частью. Они располагаются строго на мнимой оси $\operatorname{Im} z$.

В числах $z_7 = 2 + 3i$, $z_8 = -4 + i$, $z_9 = -3 - 3i$, $z_{10} = \sqrt{2} - i$ и действительная и мнимая части не равны нулю. Такие числа тоже обозначаются точками на комплексной плоскости, при этом, к ним принято проводить радиус-векторы из начала координат (обозначены красным цветом на чертеже). Радиус-векторы к числам, которые располагаются на осях, обычно не чертят, потому что они сливаются с осями.

**Сложение комплексных чисел**

Пример 1. Сложить два комплексных числа $z_1 = 1 + 3i$, $z_2 = 4 - 5i$

Для того чтобы сложить два комплексных числа нужно сложить их действительные и мнимые части: $z_1 + z_2 = 1 + 3i + 4 - 5i = 5 - 2i$

**Вычитание комплексных чисел**

Пример 2 Найти разности комплексных чисел $z_1 - z_2$ и $z_2 - z_1$, если $z_1 = -2 + i$, $z_2 = \sqrt{3} + 5i$

Действие аналогично сложению, единственная особенность состоит в том, что вычитаемое нужно взять в скобки, а затем – стандартно раскрыть эти скобки со сменой знака:

$z_1 - z_2 = -2 + i - (\sqrt{3} + 5i) = -2 + i - \sqrt{3} - 5i = -2 - \sqrt{3} - 4i$

действительная часть в этом числе – составная: $-2 - \sqrt{3}$. Для наглядности ответ можно переписать так: $z_1 - z_2 = (-2 - \sqrt{3}) - 4i$.

Рассчитаем вторую разность:

$z_2 - z_1 = \sqrt{3} + 5i - (-2 + i) = \sqrt{3} + 5i + 2 - i = 2 + \sqrt{3} + 4i$

Здесь действительная часть тоже составная: $2 + \sqrt{3}$

Чтобы не было какой-то недосказанности, приведу короткий пример с «нехорошей» мнимой частью: $-1 + \sqrt{2}i + 7 - 3i = 6 + (\sqrt{2} - 3)i$. Вот здесь без скобок уже не обойтись.

**Умножение комплексных чисел**

Настал момент познакомить вас со знаменитым равенством: $i^2 = -1$

Пример 3 Найти произведение комплексных чисел $z_1 = 1 - i$, $z_2 = 3 + 6i$ Очевидно, что произведение следует записать так: $z_1 \cdot z_2 = (1 - i)(3 + 6i)$ далее надо раскрыть скобки по правилу умножения многочленов. $z_1 \cdot z_2 = (1 - i)(3 + 6i) = 1 \cdot 3 - i \cdot 3 + 1 \cdot 6i - i \cdot 6i = 3 - 3i + 6i + 6 = 9 + 3i$

Понятно, что $-i \cdot 6i = -6i^2 = -6 \cdot (-1) = +6$

**Деление комплексных чисел**

Пример 4 Даны комплексные числа $z_1 = 13 + i$, $z_2 = 7 - 6i$. Найти частное $\frac{z_1}{z_2}$.

Составим частное:

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{13 + i}{7 - 6i}$ Деление чисел осуществляется методом умножения знаменателя и числителя на сопряженное знаменателю выражение.

Вспоминаем бородатую формулу $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$ и смотрим на наш знаменатель: $7 - 6i$. В знаменателе уже есть $(a - b)$, поэтому сопряженным выражением в данном случае является $(a + b)$, то есть $7 + 6i$ Согласно правилу, знаменатель нужно умножить на $7 + 6i$, и, чтобы ничего не изменилось, домножить числитель на то же самое число $7 + 6i$:

$\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{(13+i)(7+6i)}{(7-6i)(7+6i)}$ Далее в числителе нужно раскрыть . А в знаменателе воспользоваться формулой $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$ (помним, что $i^2=-1$ )

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(13+i)(7+6i)}{(7-6i)(7+6i)} = \frac{91+7i+78i+6i^2}{7^2-(6i)^2} = \frac{91+7i+78i-6}{49-(-36)} =$$

Подробно $= \dfrac{85+85i}{49+36} = \dfrac{85+85i}{85} = 1+i$

<u>Пример 5</u> Дано комплексное число $z=\dfrac{1}{\sqrt{3}+i}$. Записать данное число в алгебраической форме (т.е. в форме $a+bi$ ).Приём тот же самый – умножаем знаменатель и числитель на сопряженное знаменателю выражение. Снова смотрим на формулу $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$. В знаменателе уже есть $(a+b)$, поэтому знаменатель и числитель нужно домножить на сопряженное выражение $(a-b)$, то есть на $\sqrt{3}-i$:

$$z = \frac{1}{\sqrt{3}+i} = \frac{\sqrt{3}-i}{(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)} = \frac{\sqrt{3}-i}{(\sqrt{3})^2-(i)^2} = \frac{\sqrt{3}-i}{3+1} = \frac{\sqrt{3}-i}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{4}i$$

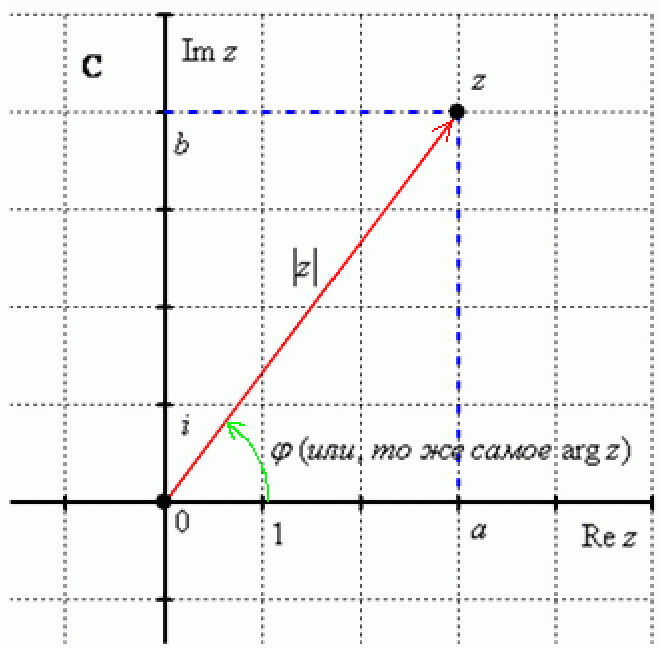



Рис. 5.2.

**Модулем комплексного числа** $z$ называется расстояние от начала координат до соответствующей точки комплексной плоскости. Попросту говоря, **модуль – это длина** радиус-вектора, который на чертеже обозначен красным цветом.

Модуль комплексного числа $z$ стандартно обозначают: $|z|$ или $r$
По теореме Пифагора легко вывести формулу для нахождения модуля комплексного числа: $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$.

**Контрольные вопросы**

1. Дайте определение комплексного числа

2. Как изображается комплексное число на координатной плоскости?
3.Как вычислить сумму комплексных чисел? Разность: произведение?
4.Как разделить одно комплексное число на другое?
5.дайте определение модуля комплексного числа.

**Задания**

1. Вычислить сумму комплексных чисел: $z_1+z_2$-? $z_1=2+3i$ $z_2= 4-6i$; $z_1=15$ $z_2= -3i$; $z_1=2-4i$ $z_2=2$.
2.Вычислить разность этих же чисел.
3.Вычислить произведение этих же чисел.
4. Вычислить $z_1/z_2$ и $z_2/z_1$ этих же чисел.

## КРИТЕРИИ ОЦЕНКИ ВЫПОЛНЕННЫХ ЗАДАНИЙ

| Вид работ | Критерии оценки | Баллы |
|---|---|---|
| Выполнение задания | Задание выполнено полностью с отличным качеством оформления отчета, рациональным использованием времени, самостоятельным планированием и организацией. | 5 |
| | Задание выполнено с незначительными недочетами, хорошее качество оформления отчета, соблюдение отведенного на выполнение задания времени, самостоятельное планирование и выполнение задания при несущественной помощи преподавателя. | 4 |
| | Удовлетворительное выполнение задания, помощь преподавателя в планировании и выполнении задания, отдельные ошибки и неточности в формулировках, оформлении отчета, нарушения в организации и планировании работы. | 3 |
| | Неудовлетворительное выполнение задания, с грубыми ошибками в отчете и защите работы, без соблюдения, отведенного на выполнение задания времени, неумение самостоятельно организовывать и планировать работу. | 2 |
| Выполнение задания с нарушениями сроков сдачи. | Задание выполнено во время консультаций, позже установленного срока оценивается по аналогичным критериям. | 3 |