САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ «КОЛЛЕДЖ «КРАСНОСЕЛЬСКИЙ»

РАССМОТРЕНО И ПРИНЯТО на заседании Педагогического Совета СПб ГБПОУ «Колледж «Красносельский» Протокол №__6__ от ___07.06._ 2024 г.	**УТВЕРЖДАЮ** Директор СПб ГБПОУ «Колледж «Красносельский» _______________ Г.И. Софина «_____» ___________ 2024 г. Приказ №_101-осн._ от _07.06._ 20243 г.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ

по дисциплине

ОД.07 Математика

для обучающихся по профессии

08.01.28 Мастер отделочных строительных и декоративных работ

Санкт-Петербург
2024 г.

РАССМОТРЕНО И ОДОБРЕНО
На заседании МК СПб ГБПОУ «Колледж «Красносельский»
Протокол №_____ от __________ 2024 г.
Председатель МК ______________ Н.В. Медведева

Организация-разработчик: СПб ГБПОУ «Колледж «Красносельский»

Методические указания к практическим занятиям являются частью основной профессиональной образовательной программы СПО по профессии 08.01.28 Мастер отделочных строительных и декоративных работ.
Укрупненная группа профессий 08.00.00 Техника и технологии строительства.
Дисциплина «ОД.07 Математика».

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Методические рекомендации предназначены для обучающихся Колледжа, изучающих учебную дисциплину _математика_.

Методические рекомендации включают в себя учебную цель, перечень образовательных результатов, заявленных во ФГОС СПО, задачи, обеспеченность занятия, краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме, вопросы для закрепления теоретического материала, задания для практической работы и инструкцию по ее выполнению, методику анализа полученных результатов, порядок и образец отчета о проделанной работе.

Учебные материалы к каждому из занятий включают контрольные вопросы, задания. Пособие содержит также список рекомендуемой литературы – основной, дополнительной и справочной, которая может использоваться обучающимися не только при подготовке к практическим занятиям, но и при написании рефератов.

1. ПЕРЕЧЕНЬ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

№ раздела, темы	**Тематика практического занятия**	**Кол-во часов**
1 курс		
Тема 1.3.	Практическое занятие №1.3ПМ. Геометрия на плоскости	1
	Практическое занятие №1.3пм	1
Тема 1.4.	Практическое занятие №1.4. Процентные вычисления	4
	Практическое занятие № 1.4 (1)	1
	Практическое занятие № 1.4 (2)	1
	Практическое занятие № 1.4 (3)	1
	Практическое занятие № 1.4 (4)	1
Тема 1.5.	Практическое занятие №1.5. Уравнения и неравенства.	2
	Практическое занятие № 1.5 (1)	1
	Практическое занятие № 1.5 (2)	1
Тема 2.2.	Практическое занятие №2.2. Параллельность прямых, прямой и плоскости, плоскостей.	2
	Практическое занятие № 2.2 (1)	1
	Практическое занятие № 2.2 (2)	1
Тема 2.5.	Практическое занятие №2.5. Параллельные, перпендикулярные, скрещивающиеся прямые.	2
	Практическое занятие № 2.5пм	1
	Практическое занятие № 2.5пм	1
Тема 3.2	Практическое занятие №3.2. Векторы в пространстве. Угол между векторами. Скалярное произведение векторов	2
	Практическое занятие № 3.2 (1)	1
	Практическое занятие № 3.2 (2)	1
Тема 3.3	Практическое занятие №3.3. Практико-ориентированные задачи на координатной плоскости.	2
	Практическое занятие № 3.3пм	1

№ раздела, темы	Тематика практического занятия	Кол-во часов
	Практическое занятие № 3.3пм	1
Тема 4.2	Практическое занятие №4.2. Основные тригонометрические тождества. Формулы приведения.	2
	Практическое занятие № 4.2 (1)	1
	Практическое занятие № 4.2 (2)	1
Тема 4.3	Практическое занятие №4.3. Синус, косинус, тангенс суммы и разности двух углов. Синус и косинус двойного угла. Формулы половинного угла.	2
	Практическое занятие № 4.3 (1)	1
	Практическое занятие № 4.3 (2)	1
Тема 4.5	Практическое занятие № 4.5	2
Тема 4.6	Практическое занятие №4.6. Преобразование графиков.	2
	Практическое занятие № 4.6	1
	Практическое занятие № 4.6	1
Тема 4.7	Практическое занятие №4.7ПМ. Описание производственных процессов с помощью графиков.	2
	Практическое занятие № 4.7пм	1
	Практическое занятие № 4.7пм	1
Тема 4.8	Практическое занятие №4.8. Тригонометрические уравнения и неравенства.	3
	Практическое занятие № 4.8 (1)	1
	Практическое занятие № 4.8 (2)	1
Тема 5.2	Практическое занятие №5.2. Применение комплексных чисел.	4
	Практическое занятие № 5.2 (1-4)	1
	Практическое занятие № 5.2 (1-4)	1
	Практическое занятие № 5.2 (1-4)	1
	Практическое занятие № 5.2 (1-4)	1
Тема 6.2	Практическое занятие №6.2. Производные суммы, разности произведения, частного.	3
	Практическое занятие № 6.2 (1)	1
Тема 6.3	Практическое занятие № 6.3	1
Тема 6.4	Практическое занятие №6.4. Геометрический и физический смысл производной.	2
	Практическое занятие № 6.4 (1)	1
	Практическое занятие № 6.4 (2)	2
Тема 6.5	Практическое занятие №6.5. Физический смысл производной в профессиональных задачах.	2
	Практическое занятие № 6.5 (1)	1
	Практическое занятие № 6.5 (2)	1
Тема 6.6	Практическое занятие № 6.6	1
Тема 6.7	Практическое занятие № 6.7	1
Тема 6.8	Практическое занятие № 6.8	1

№ раздела, темы	Тематика практического занятия	Кол-во часов
Тема 6.9	Практическое занятие №6.9ПМ. Нахождение оптимального результата с помощью производной в практических задачах.	3
	Практическое занятие № 6.9пм	1
	Практическое занятие № 6.9пм	1
	Практическое занятие № 6.9пм	1
Тема 7.5	Практическое занятие № 7.5	
Тема 7.7	Практическое занятие №7.7ПМ. Примеры симметрии в профессии.	3
	Практическое занятие № 7.7пм	1
	Практическое занятие № 7.7пм	1
	Практическое занятие № 7.7пм	1
Тема 7.8	Практическое занятие №7.8. Правильные многогранники, их свойства.	2
	Практическое занятие № 7.8 (1)	1
	Практическое занятие № 7.8 (2)	1
Тема 7.10	Практическое занятие №7.10ПМ. Конус, его составляющие. Сечение конуса.	2
	Практическое занятие № 7.10пм	1
	Практическое занятие № 7.10пм	1
Тема 7.13	Практическое занятие № 7.13	1
Тема 7.14	Практическое занятие № 7.14	
Тема 7.15	Практическое занятие №7.15. Комбинации многогранников и тел вращения.	4
	Практическое занятие № 7.15 (1-4)	1
	Практическое занятие № 7.15 (1-4)	1
	Практическое занятие № 7.15 (1-4)	1
	Практическое занятие № 7.15 (1-4)	1
Тема 7.16	Практическое занятие №7.16. Геометрические комбинации на практике.	4
	Практическое занятие № 7.16 (1-4)	1
	Практическое занятие № 7.16 (1-4)	1
	Практическое занятие № 7.16 (1-4)	1
	Практическое занятие № 7.16 (1-4)	1
Тема 8.2	Практическое занятие № 8.2	2
Тема 8.3	Практическое занятие №8.3. Понятие об определенном интеграле как площади криволинейной трапеции.	2
	Практическое занятие № 8.3 (1)	1
	Практическое занятие № 8.3 (2)	1
Тема 8.4	Практическое занятие №8.4ПМ. Определенный интеграл в жизни.	2
	Практическое занятие № 8.4пм	1
	Практическое занятие № 8.4пм	1
Тема 9.4	Практическое занятие №9.4. Решение иррациональных уравнений и неравенств.	2
	Практическое занятие № 9.4 (1)	1

№ раздела, темы	Тематика практического занятия	Кол-во часов
	Практическое занятие № 9.4 (2)	1
Тема 10.2	Практическое занятие №10.2. Решение показательных уравнений и неравенств.	5
	Практическое занятие № 10.2 (1)	1
	Практическое занятие № 10.2 (2)	1
	Практическое занятие № 10.2 (3)	1
	Практическое занятие № 10.2 (4)	1
	Практическое занятие № 10.2 (5)	1
Тема 10.3	Практическое занятие № 10.3	2
Тема 11.2	Практическое занятие №11.2. Свойства логарифмов. Операция логарифмирования.	2
	Практическое занятие № 11.2 (1)	1
	Практическое занятие № 11.2 (2)	1
Тема 11.4	Практическое занятие №11.4. Решение логарифмических уравнений и неравенств.	5
	Практическое занятие № 11.4 (1)	1
	Практическое занятие № 11.4 (2)	1
	Практическое занятие № 11.4 (3)	1
	Практическое занятие № 11.4 (4)	1
	Практическое занятие № 11.4 (5)	1
Тема 11.5	Практическое занятие №11.5ПМ. Логарифмы в природе и технике	2
	Практическое занятие № 11.5пм	1
	Практическое занятие № 11.5пм	1
Тема 12.2	Практическое занятие №12.2ПМ. Операции с множествами	1
	Практическое занятие № 12.2пм	1
Тема 13.3	Практическое занятие №13.3ПМ. Вероятность в профессиональных задачах	2
	Практическое занятие № 13.3пм	1
	Практическое занятие № 13.3пм	1
Тема 13.6	Практическое занятие №13.6ПМ. Составление таблиц и диаграмм на практике	2
	Практическое занятие № 13.6пм	1
	Практическое занятие № 13.6пм	1
Тема 14.1	Практическое занятие №14.1. Равносильность уравнений и неравенств. Общие методы решения.	2
	Практическое занятие № 14.1 (1)	1
	Практическое занятие № 14.1 (2)	1
Тема 14.2	Практическое занятие № 14.2	1
Тема 14.5	Практическое занятие №14.5ПМ. Составление и решение профессиональных задач с помощью уравнений	4
	Практическое занятие № 14.5пм	1
	Практическое занятие № 14.5пм	1
	Практическое занятие № 14.5пм	1
	Практическое занятие № 14.5пм	1

№ раздела, темы	Тематика практического занятия	Кол-во часов
Тема 14.6	Практическое занятие №14.6. Решение задач. Уравнения и неравенства.	2
	Практическое занятие № 14.6 (1)	1
	Практическое занятие № 14.6 (2)	1
	Всего	108

Практическая работа 1.3пм: «Геометрия на плоскости»

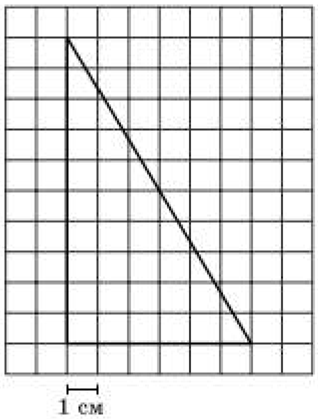
Цель работы: Виды плоских фигур и их площади. Владение методами доказательств и алгоритмов решения; умение их применять, проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач

Ответом к каждому заданию является конечная десятичная дробь, целое число или последовательность цифр. Запишите ответ к заданию в поле ответа. Единицы измерения писать не нужно.

1 В равнобедренном треугольнике AKC с основанием AC боковая сторона AK равна 15, а $\cos \angle A = \frac{3}{5}$. Найдите высоту, проведённую к основанию.

Ответ: ____________________.

2 Найдите площадь треугольника (в квадратных сантиметрах), который изображён на клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см (см. рисунок).



Ответ: ____________________.

3 В треугольнике ABC проведена биссектриса AM, которая делит сторону BC на отрезки BM и MC. Найдите угол C, если $BC=8$, $BM:MC=7:5$, $AB+AC=12$.

Ответ: ____________________.

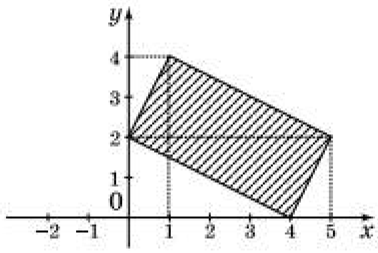
4 В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC боковая сторона AB равна 15, а $\cos \angle A = \frac{2\sqrt{6}}{5}$. Найдите высоту, проведенную к основанию.

Ответ: ____________________.

5 В треугольнике ABC угол C равен 90°, $AB = 10$, $AC = 5\sqrt{3}$. Найдите $\sin \angle A$.

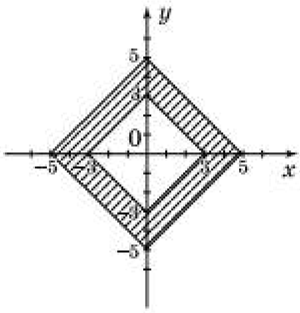
Ответ: ____________________.

6 Найдите площадь четырёхугольника, вершины которого имеют координаты: (0; 2); (1; 4); (5; 2); (4; 0).



Ответ: ____________________.

7 Найдите площадь заштрихованной фигуры на координатной плоскости.

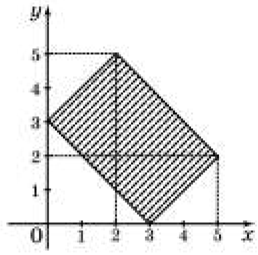


Ответ: ____________________.

8 Найдите большую диагональ параллелограмма $ABCD$, стороны которого относятся как $2:3$, а перпендикуляр AM, проведённый к меньшей диагонали, делит её на отрезки 4 и 9.

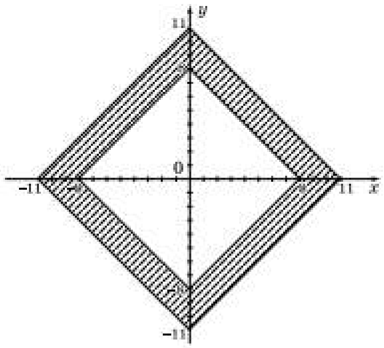
Ответ: ____________________.

9 Найдите площадь четырёхугольника, вершины которого имеют координаты (0; 3); (2; 5); (3; 0); (5; 2).



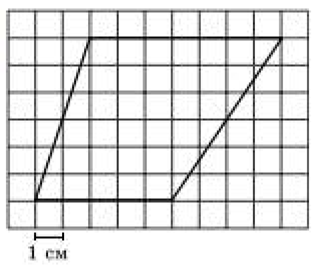
Ответ: ____________________.

10 Найдите площадь заштрихованной фигуры на плоскости.



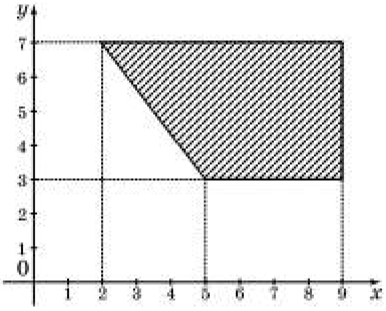
Ответ: ____________________.

11 Найдите в квадратных сантиметрах площадь трапеции, изображённой на клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см (см. рисунок).



Ответ: ____________________.

12 Найдите площадь изображённой на рисунке трапеции.

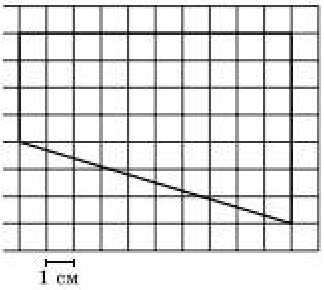


Ответ: ____________________.

13 В равнобокой трапеции разность оснований равна 20 см, а периметр — 65 см. Вычислите площадь трапеции, если её боковая сторона и высота относятся как 5 : 3.

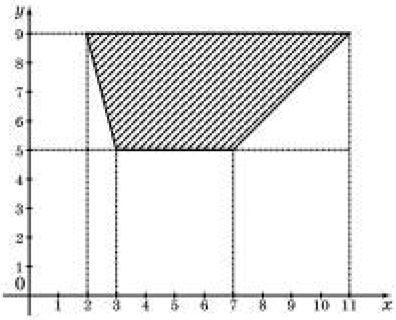
Ответ: ____________________.

14 Найдите в квадратных сантиметрах площадь трапеции, изображённой на клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см (см. рисунок).



Ответ: ____________________.

15 Найдите площадь трапеции, изображённой на рисунке.



Ответ: ____________________.

16 Точки A, B, C, D лежат на окружности, AB — диаметр окружности, величина угла DCB равняется 43°. Найдите величину угла ABD.

Ответ: ____________________.

17 Через точку A, находящуюся вне окружности, проведена прямая, которая пересекает данную окружность в точках K и B, причём $AK = 8$ см, $AB = 32$ см. Найдите расстояние от точки A до центра данной окружности, если её радиус равен 12 см.

Ответ: ____________________.

18 Боковая сторона равнобедренного треугольника — 6 см, высота, проведённая к основанию, равна 4 см. Найдите разность между площадью круга, ограниченного окружностью, описанной около данного треугольника, и длиной этой окружности. В ответ запишите результат, поделённый на π.

Ответ: ____________________.

19 Катеты прямоугольного треугольника равны 40 см и 42 см.

Найдите радиусы описанной (R) и вписанной (r) в него окружностей. ($R = \frac{abc}{4S}$, $r = \frac{2S}{a+b+c}$, где a, b, c — стороны треугольника, S — площадь треугольника.)

Ответ: ____________________.

20 Найдите количество сторон выпуклого многоугольника, сумма всех внутренних углов которого и всех внешних углов, взятых по одному при каждой вершине многоугольника, равна 1440°.

Ответ: ____________________.

21 Число диагоналей выпуклого многоугольника равно 119.
Найдите сумму его внутренних углов.

Ответ: ____________________.

22 Углы выпуклого шестиугольника пропорциональны числам $3:5:6:9:10:15$. Найдите эти углы.
В ответ запишите разность величин большего и меньшего из них.

Ответ: ____________________.

23 Найдите число сторон выпуклого n-угольника, если три его угла составляют по 186°, а остальные — по 126°.

Ответ: ____________________.

24 Найдите сумму всех внутренних и внешних углов, взятых по одному при каждой вершине выпуклого пятиугольника.

Ответ: ____________________.

25 В выпуклом многоугольнике сумма всех внутренних углов равна 2340°.
Найдите число диагоналей данного многоугольника.

Ответ: ____________________.

26 Найдите количество сторон правильного многоугольника, внешний угол которого составляет $\frac{1}{3}$ внутреннего угла многоугольника.

Ответ: ____________________.

27 В окружность радиуса $10\sqrt{2}$ см вписан правильный треугольник. В этот треугольник вписана окружность, а в окружность — квадрат. Найдите сторону квадрата.

Ответ: ____________________.

Практическая работа 1.4.: «**Процентные вычисления**» **(1)**

Задача 1. Найти число, если 42% его составляют 12,6.

Задача 2. Какой процент составляет 1,3 от 39?

Задача 3. Найти число 175% которого составляют 78,75.

Задача 4. Цена товара была снижена сначала на 24% , а затем на 50% от новой цены. Найти общий процент снижения цены товара.

Задача 5. Высота пирамиды равна 5 см, а площадь её основания равна 4 см^2. На сколько процентов увеличится объём этой пирамиды, если и площадь основания, и высоту увеличить на 10% ?

Задача 6. Магазин закупает цветочные горшки по оптовой цене 140 рублей за штуку и продает с наценкой 25%. Какое наибольшее число таких горшков можно купить на 1100 рублей?

Задача 7. Цена на товар была повышена 19% и составила 1785 рублей. Сколько рублей стоил этот товар до повышения цены?

Задача 8. Клиент взял в банке кредит 180000 рублей на год под 12% годовых. Он должен погашать кредит, внося ежемесячно одинаковую сумму денег, чтобы через год выплатить всю сумму вместе с процентами. Сколько рублей он должен вносить в банк ежемесячно?

Задача 9. Цена на люстру была повышена на 15% и составила 2300 рублей. Сколько рублей стоила люстра до повышения цены?

Задача 10. Стоимость товара и перевозки составляет 3942 р., причем расходы по перевозке товара составляют 8% стоимости самого товара. Какова стоимость товара без учета стоимости его перевозки?

Примечания:

1. На выполнение работы отводится 40 – 45   минут

За верно выполненные (5 – 6) заданий ставится оценка «удовлетворительно», за (7 – 8) оценка «хорошо», за (9 – 10) оценка «отлично».

Практическое занятие № 1.4 (2)

По теме: Процентные вычисления

Задача 1. Тетрадь стоит 30 рублей. Какое наибольшее число тетрадей можно купить на 150 рублей после понижения цены на 25%?

Задача 2. Налог на доходы составляет 13% от заработной платы. Заработная плата равна 12000 рублей. Сколько рублей получит работник после вычета налога на доходы?

Задача 3. В один стакан чая обычно кладут 2 чайные ложки сахара. Масса чая в стакане 200 г, масса сахара в одной чайной ложке 10 г. Какова концентрация сахара в чае?

Задача 4. Верно ли, что если сначала увеличить количество на 8%, затем полученный результат уменьшить на 8%, то получится исходное количество?

Задача 5. Сторону квадрата увеличили на 20%. На сколько процентов увеличилась площадь квадрата? Периметр квадрата?

Задача 6. Токарь и его ученик должны были за смену изготовлять 30 деталей. Рабочий перевыполнил план на 10%, а его ученик – на 20%, и они вместе изготовили 148 деталей. Сколько деталей каждый из них должен был изготовлять до повышения производительности труда?

Задача 7. На сколько процентов число 32 меньше числа 40? На сколько процентов число 40 больше числа 32?

Примечания:

1. На выполнение работы отводится 40 – 45 минут
2. За верно выполненные (4) задания ставится оценка «удовлетворительно», за (5 – 6) оценка «хорошо», за (7) оценка «отлично»

Практическое занятие № 1.4 (3)

По теме: Процентные вычисления

Задача 1. Сумма двух чисел равна 1100. Найти наибольшее из них, если 6% одного числа равны 5% другого.

Задача 2. В школе 1200 учеников, из них 35% - ученики начальной школы. Среди учеников средней и старшей школы 25% изучают немецкий язык. Сколько учеников в школе изучают немецкий язык, если в начальной школе немецкий язык не изучается?

Задача 3. После двукратного повышения цены на 25% стоимость банки сока составила 57 р. 50 к. Какова была её исходная цена?

Задача 4. Цена на сахар снизилась на 20%. На сколько процентов больше сахара, чем раньше, можно купить теперь на 100 р.?

Задача 5. При покупке товаров на дорожные чеки цена товара снижается на 20%. Человек купил товар стоимостью 600 р., однако номинал чеков у него составлял лишь 400 р. Сколько пришлось доплатить за сделанную покупку?

Задача 6.” Налог на прибыль предприятий снизился на 4%, с нынешних 24 до 20%” (из газет). Верно ли это утверждение?

Задача 7. Студент получил свой первый гонорар 1500 рублей за выполненный перевод. Он решил на все деньги купить букет роз. Какое наибольшее количество роз сможет купить студент, если удержанный налог на доходы составляет 13% гонорара, розы стоят 120 рублей за штуку и букет должен состоят из нечетного числа цветов?

Примечания:

1. На выполнение работы отводится 40 – 45 минут
2. За верно выполненные (4) задания ставится оценка «удовлетворительно», за (5 - 6) оценка «хорошо», за (7) оценка «отлично»

Практическое занятие № 1.4 (4)

По теме: Процентные вычисления

Задача 1. В городе в 1990 г. Проживало 149 тыс. человек. В связи с демографическим спадом число жителей ежегодно уменьшалось на 1,7%. Сколько человек проживало в городе в конце 2002 г?

Задача 2. Если за год цены выросли в 2 раза, то какова средняя ежемесячная инфляция?

Задача 3. Некто каждый год в один и тот же день вносит в банк 3 тыс. р. Под 5% годовых. Какая сумма будет на счету через 10 лет?

Задача 4. По обычному вкладу банк начисляет 2% годовых. Вкладчик внес 500 р., а через месяц снял со счета 100 р. Какая сумма денег будет на его счету по истечении года со дня выдачи ему 100 р.?

Задача 5. В растворе содержится 40 % соли. Если добавить 120 г соли в раствор, то процентное содержание соли станет равным 70%. Сколько соли было первоначально в растворе?

Примечания:

1. На выполнение работы отводится 40 – 45 минут
2. За верно выполненные (3) задания ставится оценка «удовлетворительно», за (4) оценка «хорошо», за (5) оценка «отлично»

Практическое занятие № 1.5 (1)

По теме: Уравнения и неравенства

1. Решить уравнение $\frac{3x-16}{12}+1=\frac{x+6}{4}-\frac{x+3}{6}$

2. Решить уравнение 2. $\frac{5}{3}(x-7)-3x-\frac{6(x-8)}{7}=-\left(x+\frac{43}{3}\right)$

3. Решить уравнение 3. $4x^2+12x-27=0$

4. Решить уравнение 4. $4x^2-20x-75=0$

5. Решить уравнение 5. $\frac{(12-x)(x-2)}{4-x^2}=0$

6. Решить уравнение 6. $\frac{10}{x}-\frac{20}{x+6}=\frac{1}{2}$

7. Решить уравнение

8. При каком значении a уравнение $a(x-3)+8=13(x+2)$ имеет корень, равный 0?

8. Решить уравнение $\frac{3}{x+3}-\frac{2}{x-3}=\frac{4}{x^2-9}$

9. Решить уравнение $2(x+3)(x+1)+8=(2x+1)(x+5)$

Примечания:

1. На выполнение работы отводится 40 – 45 минут
2. За верно выполненные (5 – 6) заданий ставится оценка «удовлетворительно», за (7 – 8) оценка «хорошо», за (9) оценка «отлично»

Практическое занятие № 1.5 (2)

По теме: Уравнения и неравенства

Решить неравенство 1. $x + 8 > 4 - 3x$

Решить неравенство 2. $\frac{4-3x}{8} - \frac{5-2x}{12} < 2$

Решить неравенство 3. $\frac{5x-7}{6} - \frac{x+2}{7} \geq 2$

Решить неравенство 4. $\frac{5x-4}{7x+5} > 0$

Решить неравенство 5. $\frac{3-2x}{3x-2} < 0$

Решить неравенство 6. $\frac{x^2-9}{x^2-4} < 0$

Решить неравенство 7. $\frac{x^2+2x-3}{2x-3} > 0$

Решить неравенство 8. $\frac{x^2-4}{2x+1} < 0$

Решить неравенство 9. $\frac{54-6x^2}{4x+7} < 0$

Примечания:

1. На выполнение работы отводится 40 – 45 минут
2. За верно выполненные (5 – 6) заданий ставится оценка «удовлетворительно», за (7 – 8) оценка «хорошо», за (9) оценка «отлично»

Практическое занятие № 2.2 (1)

По теме: Параллельность прямых, прямой и плоскости, плоскостей

Задача 1

В тетраэдре DABC дано: ∠ADB = 54°, ∠BDC = 72°, ∠CDA = 90°, DA = 20 см, BD = 18 см, DC = 21 см. Найдите: а) рёбра основания ABC данного тетраэдра; б) площади всех боковых граней.

Задача 2

Прямая а параллельна плоскости α. Верно ли, что эта прямая:

а) не пересекает ни одну прямую, лежащую в плоскости α;

б) параллельна любой прямой, лежащей в плоскости α;

в) параллельна некоторой прямой, лежащей в плоскости α?

Задача 3

Точки M и N – середины рёбер AB и AC тетраэдра ABCD. Докажите, что прямая MN параллельна плоскости BCD.

Задача 4

Существует ли параллелепипед, у которого: а) только одна грань – прямоугольник; б) только две смежные грани – ромбы.

Примечания:

1. На выполнение работы отводится 40 – 45 минут
2. За верно выполненные два задания ставится оценка «удовлетворительно», за три оценка «хорошо», за четыре оценка «отлично»

Практическое занятие № 2.2 (2)

По теме: Параллельность прямых, прямой и плоскости, плоскостей

Задача 1

Изобразите тетраэдр DABC и на ребрах DB, DC и BC отметьте соответственно точки M, N и K. Постройте точку пересечения:

а) прямой MN и плоскости ABC;

б) прямой KN и плоскости ABD.

Задача 2

Изобразите тетраэдр ABCD. На ребрах AB, BD и CD отмечены точки M, N и P. Построить сечение тетраэдра плоскостью MNP.

Задача 3

Изобразите параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. На ребрах параллелепипеда AA_1, DD_1, CC_1 отметьте соответственно точки M, N, K. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью MNK.

Примечания:

1. На выполнение работы отводится 40 – 45 минут

2. За верно выполненные 2 задания ставится оценка «удовлетворительно», за незначительные ошибки (при условии что все задачи решены) оценка «хорошо», за 3 оценка «отлично»

Практическая работа 2.5пм.: «Параллельные, перпендикулярные, скрещивающиеся прямые» (2 часа)

Цель работы: Аксимы стериометрии. Перпендикулярность прямой и плоскости, параллельность двух прямых, перпендикулярных плоскости, перпендикулярность плоскостей.

Ответом к каждому заданию является конечная десятичная дробь, целое число или последовательность цифр. Запишите ответ к заданию в поле ответа. Единицы измерения писать не нужно.

1 Дана прямая a и точка M ($M \notin a$). Сколько существует разных прямых, которые проходят через точку M, пересекают прямую a и перпендикулярны к ней?

Ответ: ____________________.

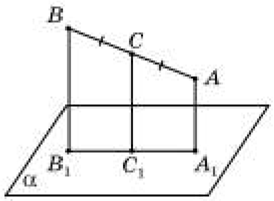
2 Плоскость α пересекает стороны AB и AC $\triangle ABC$ в точках B_1 и C_1 соответственно. $BC \parallel \alpha$. $B_1C_1 = 1$ см. $BB_1 : B_1A = 3:1$. Найдите BC.

Ответ: ____________________.

3 $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Площадь треугольника, который образовался при пересечении прямых AB_1, B_1D_1 и AD_1, равна $\sqrt{12}$.
Найдите длину ребра куба.

Ответ: ____________________.

4 Отрезок AB не пересекает плоскость α. $AC = CB$, $AA_1 \parallel CC_1 \parallel BB_1$. $BB_1 = 4$; $CC_1 = 3$. Найдите AA_1.



Ответ: ____________________.

5 Заданы скрещивающиеся прямые a и b. Сколько существует разных плоскостей, которые проходят через прямую a и параллельны прямой b?

Ответ: ____________________ .

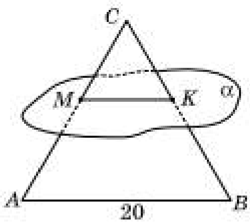
6 Сторона AB параллелограмма $ABCD$ лежит в плоскости α, а сторона CD не лежит на ней. Как расположена прямая CD относительно a?
1) пересекает a; 2) лежит в a; 3) параллельна a; 4) перпендикулярна a.
В ответ запишите цифру, под которой записано верное утверждение.

Ответ: ____________________.

7 Прямая a параллельна плоскости α. Через точки A и B прямой a проведены параллельные прямые, которые пересекают плоскость α в точках A_1 и B_1 соответственно. Найдите площадь четырёхугольника AA_1B_1B, если $A_1B_1 = 13$ см; $AA_1 = 14$ см; $A_1B = 15$ см.

Ответ: ____________________.

8 Плоскость α параллельна стороне AB треугольника ABC и пересекает его в точках M и K. M — середина AC. Найдите MK, если $AB = 20$ см.



Ответ: ____________________.

18 В $\triangle ABC$ $AB = 15$ см; $AC = 13$ см; $CB = 14$ см. Из вершины A проведён перпендикуляр AK к его плоскости, длина перпендикуляра равна 16 см. Найдите расстояние от точки K до стороны BC.

Ответ: ____________________.

19 Точка M находится на одинаковом расстоянии от всех сторон правильного треугольника со стороной $12\sqrt{3}$ см и удалена от плоскости треугольника на 8 см. Найдите расстояние от точки M до сторон треугольника.

Ответ: ____________________.

20 В $\triangle ABC$ $\angle C = 90°$, $\angle A = 30°$, больший катет 6 см. Из вершины угла B проведён перпендикуляр $BK = 2\sqrt{6}$ см к плоскости $\triangle ABC$. Найдите расстояние от точки K до AC.

Ответ: ____________________.

21 На изображении ромба $ABCD$ построили изображение его высоты BK. Найдите отношение $AK : AD$, если угол ромба равен 45°. Ответ округлите до десятых.

Ответ: ____________________.

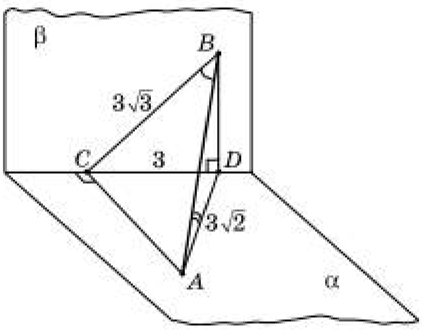
22 Концы отрезка лежат в двух взаимно перпендикулярных плоскостях. Проекции отрезка на каждую из плоскостей соответственно равны $\sqrt{369}$ см и 20 см. Расстояние между основаниями перпендикуляров, проведённых из концов отрезка к плоскости, равно 12 см.
Найдите длину этого отрезка.

Ответ: ____________________.

23 На изображении ромба $ABCD$ построили изображение его высоты BK. Найдите отношение $AK : AD$, если угол ромба равен 60°.

Ответ: ____________________.

24 Из концов отрезка, принадлежащего двум взаимно перпендикулярным плоскостям, к линии пересечения проведены перпендикуляры, расстояние между основаниями которых 3 см. Проекции отрезка на эти плоскости равны $3\sqrt{2}$ см и $3\sqrt{3}$ см. Найдите углы, образованные отрезком с этими плоскостями. В ответ запишите их сумму.



Ответ: ____________________.

Практическое занятие № 3.2 (1)

По теме: Векторы в пространстве. Угол между векторами. Скалярное произведение векторов

Задача 1

Изобразите параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Назовите вектор, начало и конец которого являются вершинами параллелепипеда, равный сумме векторов:

а) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A_1D_1}$; б) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD_1}$; в) $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{B_1B}$; г) $\overrightarrow{DD_1} + \overrightarrow{DB}$; д) $\overrightarrow{DB_1} + \overrightarrow{BC}$.

Задача 2

В пространстве даны четыре точки A, B, C и D. Назовите вектор с началом и концом в данных точках, равный сумме векторов:

а) $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DC}) + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD})$; б) $(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) + \overrightarrow{DC}$.

Задача 3

Упростите выражение:

а) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{NM}$;

б) $\overrightarrow{FK} + \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{KP} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{QK} + \overrightarrow{PF}$;

в) $\overrightarrow{KM} + \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{FK} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MP}$;

г) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{NM}$.

Примечания:

1. На выполнение работы отводится 40 – 45 минут
2. За верно выполненные 2 задания ставится оценка «удовлетворительно», за незначительные ошибки (при условии что все задачи решены) оценка «хорошо», за 3 оценка «отлично»

Практическое занятие № 3.2 (2)

По теме: Векторы в пространстве. Угол между векторами. Скалярное произведение векторов

1) Точка M – середина отрезка AB. Найдите координаты:

   а) точки M, если A $(0; 3; -4)$, B $(-2; 2; 0)$;

   б) точки B, если A $(14; -8; 5)$, M $(3; -2; -7)$;

   в) точки A, если B $(0; 0; 2)$, M $(-12; 4; 15)$.

2) Даны векторы $\vec{a}\{3; -1; 1\}$, $\vec{b} = \{-5; 1; 0\}$ и $\vec{c}\{-1; -2; 1\}$. Выясните, какой угол (острый, прямой или тупой) между векторами:

   а) $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

б) $\vec{b}$ и $\vec{c}$;

в) $\vec{a}$ и $\vec{c}$.

3) Даны точки $A(1; 3; 0)$, $B(2; 3; -1)$ и $C(1; 2; -1)$. Вычислите угол между векторами $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CB}$.

Примечания:

1. На выполнение работы отводится 40 – 45 минут
2. За верно выполненные 2 задания ставится оценка «удовлетворительно», за незначительные ошибки (при условии что все задачи решены) оценка «хорошо», за 3 оценка «отлично»

Практическая работа 3.3пм: «Практико-ориентированные задачи на координатной плоскости» **(2 часа)**

Цель работы: Понятие координатной плоскости. Вычисление расстояний и площадей на плоскости. Количественные расчеты.

ПРИМЕРЫ ЗАДАНИЙ ЕГЭ ПО ТЕМЕ 5.6. «КООРДИНАТЫ И ВЕКТОРЫ»

Ответом к каждому заданию является конечная десятичная дробь, целое число или последовательность цифр. Запишите ответ к заданию в поле ответа. Единицы измерения писать не нужно.

1 Даны векторы $\vec{a}\,(3;\ -2;\ -1)$, $\vec{b}\,(1;\ 1;\ 2)$, $\vec{c}\,(-3;\ 2;\ 4)$. Найдите координаты вектора $\vec{n} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c}$. Вычислите сумму координат вектора $\vec{n}$.

Ответ: ____________________.

2 Найдите $|\overrightarrow{AC}|$, если $A(2;\ -3;\ -1)$, $C(3;\ -1;\ -3)$.

Ответ: ____________________.

3 Даны векторы $\vec{a}\,(4;\ -3;\ 0)$, $\vec{b}\,(-6;\ 0;\ 8)$. Найдите $|\vec{a}| + |\vec{b}|$.

Ответ: ____________________.

4 Даны векторы $\vec{a}\,(4;\ -2;\ 0)$, $\vec{b}\,(-6;\ 0;\ 1)$. Найдите $|\vec{a} + \vec{b}|$.

Ответ: ____________________.

5 При каком значении n векторы $\vec{a}\,(3;\ 1;\ 5)$ и $\vec{b}\,(-6;\ -2;\ n)$ коллинеарны?

Ответ: ____________________.

6 При каком значении р векторы $\vec{a}\,(3;\ p;\ -1)$ и $\vec{b}\,(p;\ -2;\ 5)$ взаимно перпендикулярны?

Ответ: ____________________.

7 Найдите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 8$, а угол между векторами равен $120°$.

Ответ: ____________________.

8 Точки $A(1;\ 3;\ -1)$, $B(2;\ 1;\ 2)$, $C(1;\ -2;\ 1)$ — вершины параллелограмма $ABCD$. Найдите координаты вершины D. Вычислите сумму координат точки D.

Ответ: ____________________.

9 Найдите угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b} + \vec{c}$ (в градусах), если известно, что $\vec{a}\,(2;\ 2)$, $\vec{b}\,(2;\ 4)$ и $\vec{c}\,(-2;\ -6)$.

Ответ: ____________________.

10 Единичные векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $120°$. Найдите значение выражения $(\vec{a} + \vec{b})^2$.

Ответ: ____________________.

11 Найдите угол (в градусах) между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a} \cdot \vec{b} = 10$, $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 5$.

Ответ: ____________________.

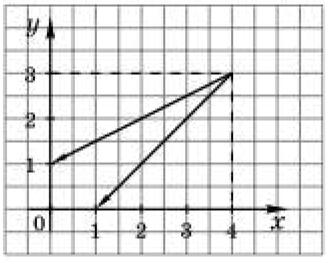
12 Найдите угол (в градусах) между векторами $\vec{a}\,(-1;\ 2)$ и $\vec{b}\,(3;\ -1)$.

Ответ: ____________________.

13 Вычислите площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}(3; 0; -4)$ и $\overrightarrow{AD}(0; 5; 0)$.

Ответ: ____________________.

14 Вычислите скалярное произведение векторов, изображённых на рисунке.



Ответ: ____________________.

15 В квадрате $ABCD$ сторона AB равна 1,5. Найдите $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

Ответ: ____________________.

16 Определите угол (в градусах) между векторами $\vec{a} - \vec{b}$ и $\vec{c}$, если известно, что $\vec{a}(3; 5; -4)$, $\vec{b}(-2; 5; -4)$, $\vec{c}(0; 0; 2)$.

Ответ: ____________________.

17 Параллелограмм $ABCD$ построен на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ как на сторонах. Известно, что $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$, $|\vec{a} + \vec{b}| = 7$. Найдите величину угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (в градусах).

Ответ: ____________________.

18 Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $120°$ и $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$. Найдите $|\vec{a} - \vec{b}|$.

Ответ: ____________________.

17. На координатной плоскости постройте изображение «автомобиля».

(9;6); (5;4); (5;5); (4;6); (2;6); (0;5); (-1;3); (-2;0);(-5;-2);(-7;-4);(-8;-4); (-11;-3); (-13;-2); (-14;-1); (-12;1); (-8;3);(-7;5); (-5;7); (2;8); (1;8); (4;6);(1;8); (5;9);(7;9);(9;8); (10;7); (10;5); (8;3); (7;4); (5;3); (4;1); (4;0); (0;-2);(-1;-1);(-3;-2);(-4;-4); (-4;-5); (-7;-6); (-9;-6); (-13;-4); (-14;-3); (-14;-1);

отдельно: (-4;-5);(-3;-6);(-2;-6); (0;-4); (0;-2) и (4;0); (5;-1); (6;-1); (8;1); (8;3) и

(-3;1); (-7;3); (-6;5); (-5;6); (-1;4); (-2;3); (-3;1); и (-1;1); (4;4); (4;5); (2;5); (0;4); (-1;1).

Практическое занятие № 4.2 (1)

По теме: Основные тригонометрические тождества. Формулы приведения

Докажите тождество:

1) $(1 + tg\alpha)(1 + ctg\alpha) - \frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha} = 2$
2) $\frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha} = \frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}$
3) $\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$
4) $sin^4\alpha + cos^4\alpha + 2sin^2\alpha \cdot cos^2\alpha = 1$
5) $\frac{1}{tg\alpha+ctg\alpha} = \sin\alpha\cos\alpha$
6) $\frac{1-2cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} = tg\alpha - ctg\alpha$
7) $\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} + \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{2}{\sin\alpha}$
8) $\frac{1}{1+tg^2\alpha} + \frac{1}{1+ctg^2\alpha} = 1$
9) $\frac{1+tg^2\alpha}{1+ctg^2\alpha} = tg^2\alpha$
10) $1 + ctg^2\alpha + \frac{1}{cos^2\alpha} = \frac{1}{sin^2\alpha \cdot cos^2\alpha}$
11) $sin^2\alpha + ctg^2\alpha + cos^2\alpha = \frac{1}{sin^2\alpha}$
12) $sin^2\alpha + tg^2\alpha + cos^2\alpha = \frac{1}{cos^2\alpha}$

Примечания:

1. На выполнение работы отводится 40 – 45 минут
2. За верно выполненные (6 – 8) заданий ставится оценка «удовлетворительно», за (9 – 10) оценка «хорошо», за (11 – 12) оценка «отлично»

Практическое занятие № 4.2 (2)

По теме: Основные тригонометрические тождества. Формулы приведения

Используя формулы приведения вычислить:

1) $\cos 150°$
2) $\sin 135°$
3) $ctg135°$
4) $\cos 225°$
5) $\sin 210°$
6) $ctg240°$
7) $tg\,\frac{5\pi}{4}$
8) $\sin\frac{7\pi}{6}$
9) $\cos\frac{5\pi}{3}$
10) $\sin\left(-\frac{13\pi}{6}\right)$
11) $tg\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$
12) $\cos\left(-\frac{7\pi}{3}\right)$

Примечания:

3. На выполнение работы отводится 40 – 45 минут
4. За верно выполненные (6 – 8) заданий ставится оценка «удовлетворительно», за (9 – 10) оценка «хорошо», за (11 – 12) оценка «отлично»

Практическое занятие № 4.3 (1)

По теме: Синус, косинус, тангенс суммы и разности двух углов. Синус и косинус двойного угла.

Вычислить:

1) $\cos\frac{8\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}+\sin\frac{8\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7}$
2) $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)$, если $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$ и $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$
3) $\sin\frac{5\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}+\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{5\pi}{12}$

Упростить выражение:

4) $\cos\left(\frac{\pi}{7}+\alpha\right)\cos\left(\frac{5\pi}{14}-\alpha\right)-\sin\left(\frac{\pi}{7}+\alpha\right)\sin\left(\frac{5\pi}{14}-\alpha\right)$
5) $\sin(\alpha+\beta)+\sin(-\beta)\cos(-\beta)$
6) $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)-\sin(\alpha-\beta)$
7) $\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)$

Примечание:

1. На выполнение работы отводится 40 – 45 минут
2. За верно выполненные 4 задания ставится оценка «удовлетворительно», за (5 – 6) оценка «хорошо», за 7 оценка «отлично»

Практическое занятие № 4.3 (2)

По теме: Синус, косинус, тангенс суммы и разности двух углов. Синус и косинус двойного угла.

Вычислить:

1) $2\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}$
2) $cos^2 15° - sin^2 15°$
3) $(\cos 75° - \sin 75°)^2$
4) $\frac{2tg\frac{\pi}{8}}{1-tg^2\frac{\pi}{8}}$
5) Вычислить $\sin 2\alpha$, если: $\sin\alpha=\frac{3}{5}$ и $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$

Упростить выражение:

6) $\sin 2\alpha+(\sin\alpha-\cos\alpha)^2$
7) $\cos 4\alpha+sin^2 2\alpha$

Примечание:

3. На выполнение работы отводится 40 – 45 минут
4. За верно выполненные 4 задания ставится оценка «удовлетворительно», за (5 – 6) оценка «хорошо», за 7 оценка «отлично»

Практическая работа № 4.6 (1-2) (2 часа)

На тему: Преобразование графиков тригонометрических функций
Цели:
Повторить, обобщить и систематизировать знания о графиках тригонометрических функций.
Закрепить навыки построения графиков тригонометрических функций.

Теоретическая часть

Если функция f(x) умножается на число m>1 , то происходит *растяжение её графика вдоль оси ординат.*

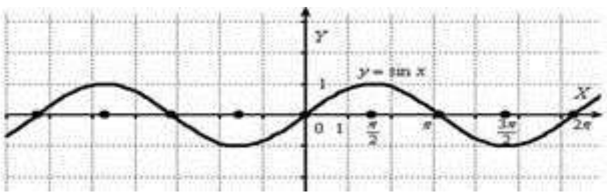
Правило: чтобы построить график функции mf(x) , где m>1 , нужно график функции растянуть вдоль оси OY в m раз.

Если функция умножается на число 0<x<1, то происходит *сжатие её графика вдоль оси ординат.*

Правило: чтобы построить график функции mf(x) , где 0<x<1 , нужно график функции f(x) **сжать вдоль оси** OY в $\frac{1}{m}$ раз.

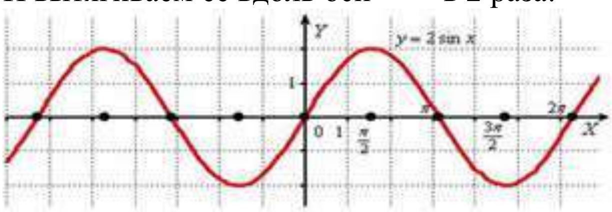
Пример 1

Построить графики функций $y = 2\sin x$ $y = \frac{1}{2}\sin x$

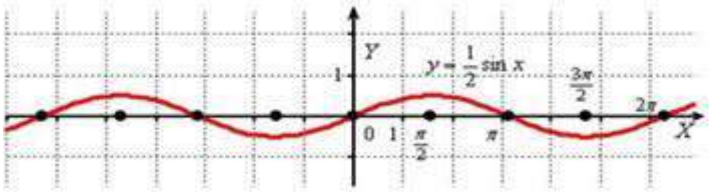


Берём синусоиду за макушку/пятки:

И вытягиваем её вдоль оси OY в 2 раза:



Теперь сожмём синусоиду вдоль оси OY в 2 раза:

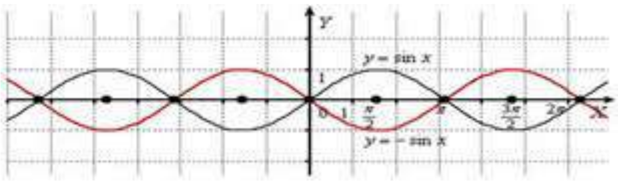


Если ФУНКЦИЯ меняет знак на противоположный, то её *график отображается симметрично относительно оси абсцисс.*

Правило: чтобы построить график функции $y =-f(x)$, нужно график $f(x)$ отобразить симметрично относительно оси OX.

Пример 2

Построить график функции $y = -sinx$



Отобразим синусоиду симметрично относительно оси OX:

Сжатие графика функции к оси ординат:

Это случай когда АРГУМЕНТ функции умножен на число, больше единицы.

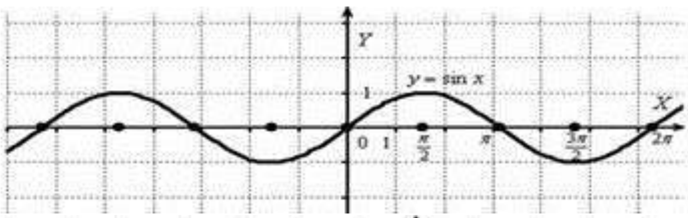
Правило: чтобы построить график функции $f(kx)$, где $k > 1$, нужно график функции $f(x)$ *<u>сжать к оси</u>* OY в k раз.

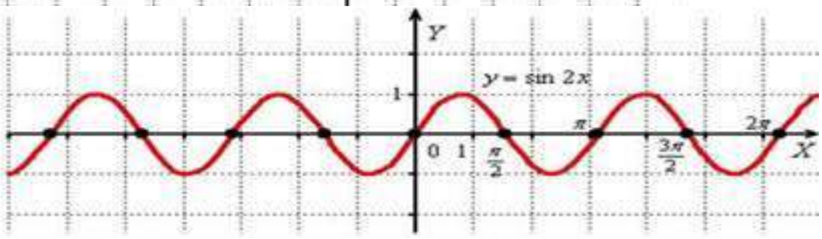
<u>Пример 3</u>

Построить график функции $y = sin2x$.

Сначала изобразим график синуса, его период равен : $T = 2\pi$

Теперь поиграем на бесконечно длинном баяне. Мысленно возьмём синусоиду в руки и сожмём её к оси OY в 2 раза:





То есть, график функции $y = sin2x$. получается путём сжатия графика $y = sinx$ к оси ординат в два раза.

Практическая часть

Построить графики функций:

а) $y = 4sinx$

б) $y = 3cosx$

в) $y = -2sinx$

г) $y = -1{,}5cosx$

д) $y = sin2x$

е) $y = cos2x$

ж) $y = 2\sin 3x$

з) $y = \cos(x - \frac{\pi}{2})$

и) $y = \cos\frac{x}{2}$

к) y = $\frac{1}{2}\sin 3x$

Практическая работа 4.7пм: «Описание производственных процессов с помощью графиков функций» (2 часа)

Цель: Использование свойств и графиков тригонометрических функций в прикладных задачах.

Колебания и волны.

В технике и окружающем нас мире часто приходится сталкиваться с **периодическими** процессами, которые повторяются через одинаковые промежутки времени. Такие процессы называют **колебательными**. **Колебаниями** называют изменения физической величины, происходящие по определенному закону во времени. Колебательные явления различной физической природы подчиняются общим закономерностям. Например, колебания тока в электрической цепи и колебания математического маятника могут описываться одинаковыми уравнениями. Общность колебательных закономерностей позволяет рассматривать колебательные процессы различной природы с единой точки зрения.

Простейшим видом колебательного процесса являются колебания, происходящие по закону синуса или косинуса, называемые **гармоническими колебаниями**. Уравнение описывающее физические системы способные совершать гармонические колебания с циклической частотой ω_0 задаётся следующим образом:

$$a + \omega_0^2 x = 0$$

Решение предыдущего уравнения является **уравнением движения для гармонических колебаний**, которое имеет вид:

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

где: x – смещение тела от положение равновесия, A – амплитуда колебаний, то есть максимальное смещение от положения равновесия, ω – циклическая или круговая частота колебаний ($\omega = 2\Pi/T$), t – время. Величина, стоящая под знаком косинуса: $\varphi = \omega t + \varphi_0$, называется **фазой** гармонического процесса. Смысл фазы колебаний: стадия, в которой колебание находится в данный момент времени. При $t = 0$ получаем, что $\varphi = \varphi_0$, поэтому φ_0 называют **начальной фазой** (то есть той стадией, из которой начиналось колебание).

Минимальный интервал времени, через который происходит повторение движения тела, называется **периодом колебаний** T. Если же количество колебаний N, а их время t, то период находится как: $T = \frac{t}{N}$

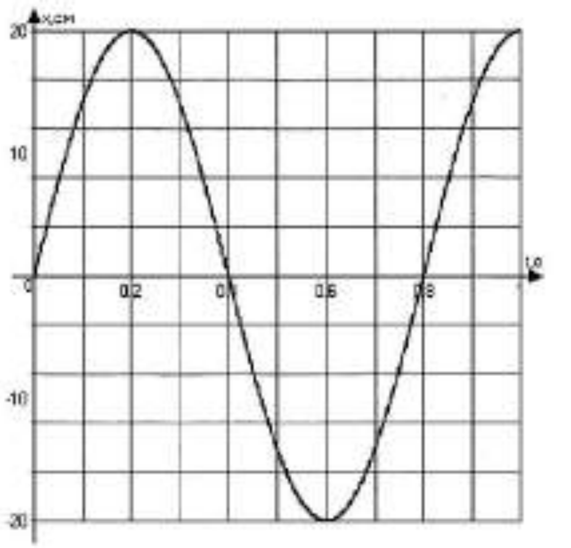
Физическая величина, обратная периоду колебаний, называется **частотой колебаний**:

$$\nu = \frac{N}{t} = \frac{1}{T}$$

Частота колебаний ν показывает, сколько колебаний совершается за 1 с. Единица частоты – Герц (Гц). Частота колебаний связана с циклической частотой ω и периодом колебаний T соотношениями: $\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$

Задачи:

1. На рисунке изображен график зависимости координаты от времени колеблющегося тела.

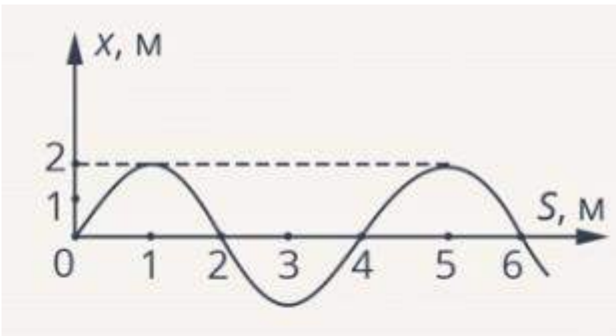


По графику определите**:** 1) амплитуду колебаний; 2) период колебаний; 3) частоту колебаний; 4) запишите уравнение координаты.

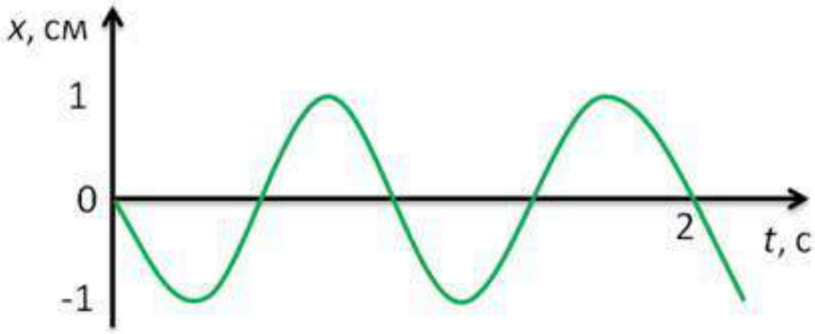
2. Гармоническое колебание описывается уравнением $x = 2\sin\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{4}\right)$**.** Чему равны циклическая частота колебаний, линейная частота колебаний, начальная фаза колебаний?

3. Есть мгновенная фотография волны в резиновом шнуре.

   Определите: 1) длину волны; 2) амплитуду колебаний частичек шнура.



4. По представленному графику определите амплитуду и период колебаний нитяного маятника.



5. По уравнению гармонических колебаний определить амплитуду, угловую скорость, период и частоту. Начертить график данного гармонического колебания.
   1) x =15 sin 3πt
   2) x = 8 sin π/3t
   3) x = 10 sin πt

6. Материальная точка совершает колебания по закону $x = 4\cos(\omega_0 t + \varphi)$ Какова её начальная фаза, если $x(0) = 2$см.

7. Некоторая точка движется вдоль оси x по закону $x = a \sin^2 (\omega t - \pi/4)$. Найти: амплитуду и период колебаний; изобразить график x (t).

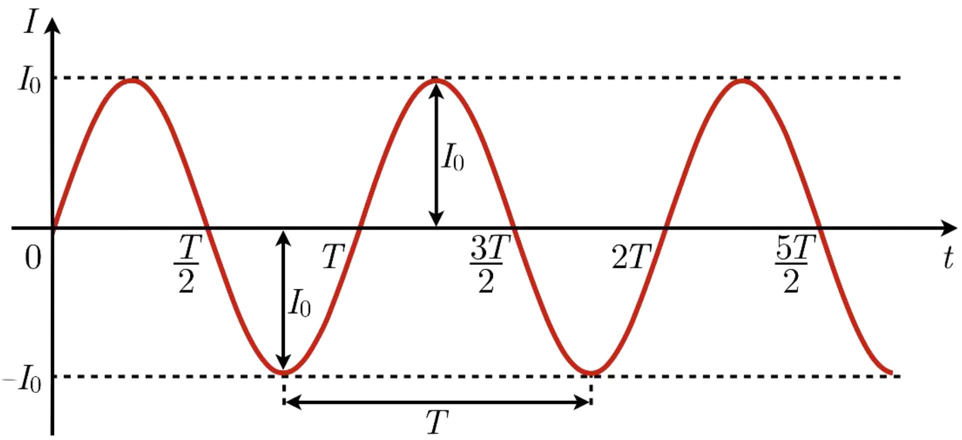
8. Напишите уравнение гармонических колебаний, если частота равна 0,5 Гц, амплитуда 80 см. Начальная фаза колебаний равна нулю.

Переменный ток.

Особую роль в электродинамике играет синусоидальный (гармонический) ток, то есть электрический ток, изменяющийся по закону синуса или косинуса:

$i = I(t) = I_0 \sin(\omega t + \varphi_0)$, где I_0- амплитуда тока, $\varphi = \varphi(t) = \omega t + \varphi_0$ – фаза колебаний, ω – циклическая частота колебаний.

На рисунке приведён пример синусоидального электрического тока $I(t)$, если $\varphi_0 = 0$.



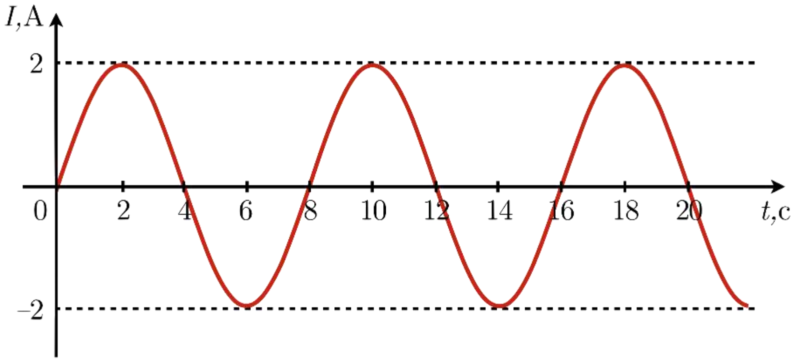
Основные характеристики

1. **Амплитуда колебаний** I_0 силы тока - максимальное отклонение силы тока от своего среднего значения. Размерность амплитуды колебаний той или иной физической величины совпадает с размерностью этой величины. В системе СИ единица измерения I_0- Ампер, то есть размерность А.
2. **Циклическая частота колебаний** ω силы тока количество полных колебаний силы тока за секунд. В системе СИ единица измерения радиан в секунду, то есть размерность рад/с. Поскольку радиан безразмерная величина, то размерность циклической частоты можно представить в виде $с^{-1}$.
3. **Период колебаний** Т силы тока время одного полного колебания силы тока. В системе СИ единица измерения секунда, то есть размерность с.

За время, равное периоду колебаний, повторяется не только величина тока, но и его направление. Он зависит от циклической частоты и определяется формулой: $T = \frac{2\pi}{\omega}$

Задачи:

1. На рисунке представлен график изменения силы тока I, протекающего через проводник, с течением времени t.



1. Определить период колебаний силы тока.
2. Чему равна амплитуда колебаний силы тока?

2. Построить графики изменения напряжений и токов для одного периода, если частота изменения напряжения для любого случая $f = 100$Гц, для токов $f = 50$ Гц: $u = 120 \sin \omega t\ B; i = 2{,}2 \sin \omega t\ A$ ($\omega = 2\pi f$).

3. В электрической цепи переменного тока проходит ток $i = I_m \sin(\omega t + \frac{\pi}{3})$A. Мгновенное значение его в момент времени $t = {}^{T}/_{4}$ $i = 1{,}6A$. Определить амплитудное и действующее значение тока, частоту и угловую частоту. Построить график изменения тока во времени, если период $T = 0{,}025\ c$.

4. Построить кривые изменения силы тока и напряжения, если их аналитические выражения имеют вид $u = 200 \sin \omega t\ B$, $i = 6 \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)$.

5. Ток в цепи меняется по гармоническому закону $i = I_m \cdot \sin wt$. Мгновенное значение силы тока i для фазы $\varphi = wt = \frac{\pi}{6}$ равно 6А. Определите амплитудное и действующее значение силы тока.

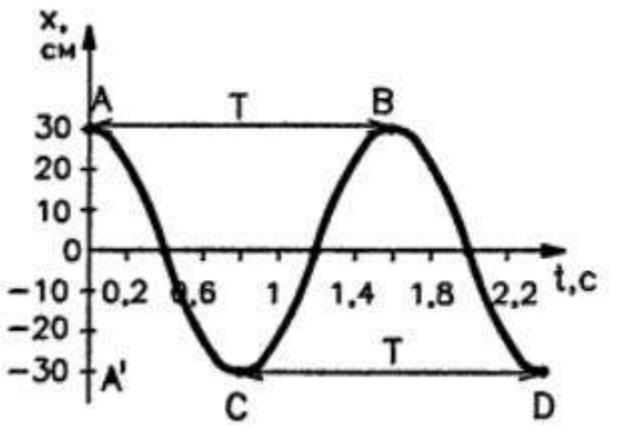
Решение.

Из гармонического закона $i = I_m \cdot \sin wt$ изменения силы переменного тока выразим его амплитудное значение $I_m = \frac{i}{\sin wt} = \frac{6}{\sin\frac{\pi}{6}}$=12А.

Действующее значение силы тока $I_д = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 8{,}5\ A$.

Самостоятельная работа.

1. Пользуясь графиком изменения координаты колеблющегося тела от времени, определить амплитуду, период и частоту колебаний. Записать уравнение зависимости x(t) и найти координату тела через 0,1 и 0,2 с после начала отсчета времени.



2. Напишите уравнение гармонического колебания, амплитуда которого 10 см, период колебаний 0,5 с.
3. Через проводник протекает переменный электрический ток. Сила тока I изменяется со временем t по закону $i = 2\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)$. Определить амплитуду колебаний силы тока. Чему равен период колебаний силы тока?
4. По уравнению гармонических колебаний определить амплитуду, угловую скорость, период и частоту. Начертить график данного гармонического колебания.
   1). x = 5 sin 2πt
   2). x = 4 sin π/2t

Критерии оценивания:

оценка	**Число заданий**
2	**Менее 2**
3	**2-3**
4	**3, 4 – не построен график.**
5	**4**

Практическое занятие № 4.9 (1)

По теме: Тригонометрические уравнения и неравенства

Решите уравнение:

1) $2\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = 1$

2) $\cos(2\pi - x) + \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sqrt{2}$

3) $2\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \sqrt{2} = 0$

4) $\cos x + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos(\pi + x) = 0$

5) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

6) $\sin(\pi + x) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sqrt{3}$

7) $4cos^2x - 1 = 0$

8) $\sin 2x - \sin x = 2\cos x - 1$

Примечания:

1. На выполнение работы отводится 40 – 45 минут
2. За верно выполненные (4 – 5) заданий ставится оценка «удовлетворительно», за (6 – 7) оценка «хорошо», за 8 оценка «отлично»

Практическое занятие № 4.9 (2)

По теме: Тригонометрические уравнения и неравенства

Решите уравнение:

1) $2sin^2x - 3\sin x + 1 = 0$

2) $2cos^2x - \cos x - 1 = 0$

3) $cos^2x + 6\sin x - 6 = 0$

4) $2sin^2x + 7\cos x + 2 = 0$

5) Найдите все решения уравнения $(\sin x + \cos x)^2 = 1 + \sin x \cos x,$ принадлежащие отрезку $[0; 2\pi]$

6) Найдите корни уравнения $2\cos x + \sqrt{2} = 0,$ принадлежащие отрезку $[0; 2\pi]$

7) Найдите все решения уравнения $tgx - ctg\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + 2 = 0,$ принадлежащие отрезку $[0; 2\pi]$

8) Найдите все решения уравнения $(\sin x + \cos x)^2 - 1 = 0,$ принадлежащие отрезку $[0; 2\pi]$

Примечания:

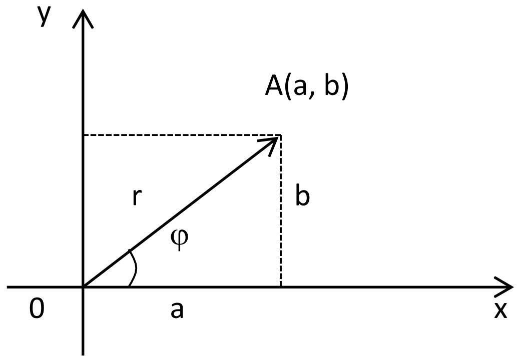
1. На выполнение работы отводится 40 – 45 минут
2. За верно выполненные (4 – 5) заданий ставится оценка «удовлетворительно», за (6 – 7) оценка «хорошо», за 8 оценка «отлично»

Практическая работа 5.2: «Применение комплексных чисел» (4 часа)

Цель работы: Выполнение расчетов с помощью комплексных чисел. Примеры использования комплексных чисел.

Определение. **Комплексным числом *z*** называется ***упорядоченная пара чисел (a,b),*** *над множеством которых по определенным правилам можно производить следующие операции: сложение , умножение, деление, возведение в степень результаты которых также являются комплексными числами.*

Понятие комплексного числа имеет **геометрическое истолкование**. Множество комплексных чисел является расширением множества действительных чисел за счет включения множества мнимых чисел. Комплексные числа включают в себя все множества чисел, которые изучались ранее. Так натуральные, целые, рациональные, иррациональные, действительные числа являются, вообще говоря, частными случаями комплексных чисел. Если любое действительное число может быть геометрически представлено в виде точки на числовой прямой, то комплексное число представляется точкой на плоскости, (комплексной плоскости z) координатами которой будут соответственно действительная и мнимая части комплексного числа. При этом горизонтальная ось будет являться действительной числовой осью, а вертикальная - мнимой осью.



Таким образом, на оси OX располагаются действительные числа a, а на оси OY –чисто мнимые-b.

.

.

§ 2. Действия над комплексными числами, записанными в алгебраической форме

Алгебраической формой комплексного числа $z = (a, b)$.называется алгебраическое выражение вида

$z = a + bi$.

Арифметические операции над комплексными числами $z1 = a1 + b1i$ и $z2 = a2 + b2i$, записанными в алгебраической форме, осуществляются следующим образом.

1. Сумма (разность) комплексных чисел

$z1 \pm z2 = (a1 \pm a2) + (b1 \pm b2) \cdot i$,

т.е. сложение (вычитание) осуществляются по правилу сложения многочленов с приведением подобных членов.

2. Произведение комплексных чисел

$z1 \cdot z2 = (a1 \cdot a2 - b1 \cdot b2) + (a1 \cdot b2 + a2 \cdot b1) \cdot i$,

т.е. умножение производится по обычному правилу умножения многочленов, с учетомтого, что $i^2=1$.

Примеры:

1. Найти сумму комплексных чисел $z_1 = 2 - i$ и $z_2 = -4 + 3i$.

$z_1 + z_2 = (2 + (-1)\cdot i) + (-4 + 3i) = (2 + (-4)) + ((-1) + 3)\, i = -2+2i.$

2. Найти произведение комплексных чисел $z_1 = 2 - 3i$ и $z_2 = -4 + 5i$.

$z_1 \square z_2 = (2 - 3i) \cdot (-4 + 5i) = 2 \cdot(-4) + (-4) \cdot(-3i) + 2\cdot 5i - 3i\cdot 5i = 7+22i.$

Найдите произведение комплексных чисел:

$z_1 = 6 - 2i$ $\quad z_2 = 4 + 3i$

а) $30 + 10i$; в) $i - 30$;

б) $30 - i$; г) $26 - 2i$.

$z_1 = 2 - 3i$ $\quad z_2 = 4 + 5i$

а) $23 - 2i$; в) $23 + 2i$;

б) $2i + 23$; г) $8 - 15i$.

$z_1 = 3 + 5i$ $\quad z_2 = 2 - 4i$

а) $26 - 2i$; в) $6 - 20i$;

б) $26i - 6$; г) $26 + 2i$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Вычислить:

1) $(3 - 2i) + (5 + 3i)$;

2) $(1 + 2i) - (3 - i)$;

3) $3(2 - i)\cdot(1 - i)$;

4) $(1 + 3i)(-7 + 2i)$;

5) $(2 - i)^2$;

6) $(1 + 2i)^3$.

2. Найти решение уравнений ($x, y \in \mathbf{R}$):

1) $(1 + i)x + (2 + i)y = 5 + 3i$;

2) $2x + (1 + i)(x + y) = 7 + i$;

3) $(3 - y + x)(1 + i) + (x - y)(2 + i) = 6 - 3i$.

1) $z = 7 - 12i$;

2) $z = 3 + 4i$;

3) $z = -3 + 7i$;

4) $z = i$.

3. Выполнить задание на стр. 20 (учебник: Башмаков М. И. «Математика: учебник для учреждений нач. и сред. проф. образования)

Практическая работа 5.2. Применение комплексных чисел (4 часа)

Практикум

§ **1.** Теоретическое введение

<u>Определение.</u> Комплексным числом z называется ***упорядоченная пара чисел (a,b),*** *над множеством которых по определенным правилам можно производить следующие операции: сложение , умножение, деление, возведение в степень результаты которых также являются комплексными числами.*

<u>Определение.</u> Алгебраической формой комплексного числа z называется выражение $z = a + ib$, где a и b – действительные числа, i – мнимая единица, которая определяется соотношением:

$i^2 = -1$; $i = \sqrt{-1}$.

При этом число a называется **действительной частью** числа z ($a = Re\ z$), а b- **мнимой частью** ($b = Im\ z$).

Если $a = Re\ z = 0$, то число z будет чисто мнимым, если $b = Im\ z = 0$, то число z будет действительным.

<u>Определение.</u> Числа $z = a + ib$ и $\bar{z} = a - ib$ называются **комплексно – сопряженными.**

<u>Определение.</u> Два комплексных числа $z_1 = a_1 + ib_1$ и $z_2 = a_2 + i\beta_2$ называются равными, если соответственно равны их действительные и мнимые части:

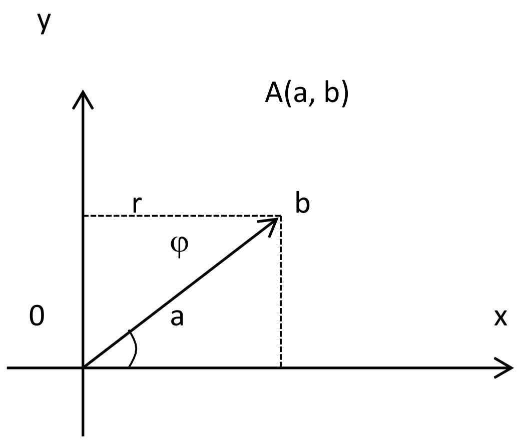
$a_1 = a_2$; $b_1 = b_2$;

<u>Определение.</u> Комплексное число равно нулю, если соответственно равны нулю действительная и мнимая части.

$$a = b = 0.$$

Понятие комплексного числа имеет **геометрическое истолкование**. Множество комплексных чисел является расширением множества действительных чисел за счет включения множества мнимых чисел. Комплексные числа включают в себя все множества чисел, которые изучались ранее. Так натуральные, целые, рациональные, иррациональные, действительные числа являются, вообще говоря, частными случаями комплексных чисел.

Если любое действительное число может быть геометрически представлено в виде точки на числовой прямой, то комплексное число представляется точкой на плоскости, (комплексной плоскости z) координатами которой будут соответственно действительная и мнимая части комплексного числа. При этом горизонтальная ось будет являться действительной числовой осью, а вертикальная - мнимой осью.



Таким образом, на оси OX располагаются действительные числа *a*, а на оси OY – чисто мнимые-*b*.

С помощью подобного геометрического представления можно представлять числа в так называемой **тригонометрической форме.**

Тригонометрическая форма числа.

Из геометрических соображений видно, что $a = r\cos\varphi$; $b = r\sin\varphi$. Тогда комплексное число можно представить в виде:

$$z = a + ib = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Такая форма записи называется **тригонометрической формой записи комплексного числа.**

При этом величина r называется **модулем** комплексного числа, а угол наклона - **аргументом** комплексного числа.

$$r = |z|; \qquad \varphi = Arg\, z\,.$$

Из геометрических соображений видно:

$$r = |a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}; \quad \varphi = Arg\, z = arctg\frac{b}{a};$$

Очевидно, что комплексно – сопряженные числа имеют одинаковые модули и противоположные аргументы.

$$|\bar{z}| = |z|; \qquad Arg\, \bar{z} = -Arg\, z.$$

Действия с комплексными числами.

Основные действия с комплексными числами вытекают из действий с многочленами.

1) Сложение и вычитание.

$$z = z_1 \pm z_2 = (a_1 + ib_1) \pm (a_2 + ib_2) = (a_1 \pm a_2) + i(b_1 \pm b_2)$$

2) Умножение.

$$z = z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + b_1 a_2)$$

В тригонометрической форме:

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), \qquad z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2).$$

$$z = z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

С случае комплексно – сопряженных чисел:

$$z\bar{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2 + b^2 = |z|^2 = |\bar{z}|^2.$$

$$\boxed{z = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i\frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}}$$

$$\boxed{z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))}$$

3) Возведение в степень.

Из операции умножения комплексных чисел следует, что

$$z^2 = zz = r^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi)$$

В общем случае получим:

$$\boxed{z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi),}$$

где n – целое положительное число.

Это выражение называется **формулой Муавра.** (Абрахам де Муавр (1667 – 1754) – английский математик)

Формулу Муавра можно использовать для нахождения тригонометрическихфункций двойного, тройного и т.д. углов.

Пример. Найти формулы sin2φ и cos2φ.

Рассмотрим некоторое комплексное число $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Тогда с одной стороны $z^2 = r^2(\cos^2\varphi + 2i\cos\varphi\sin\varphi - \sin^2\varphi)$.

По формуле Муавра: $z^2 = r^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi)$

Приравнивая, получим $\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi + 2i\cos\varphi\sin\varphi$

Т.к. два комплексных числа равны, если равны их действительные и мнимые части, то

$\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi$

$\sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi$

Получили известные формулы двойного угла.

4) Извлечение корня из комплексного числа.

$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)}$ Возводя в степень, получим:

$= \rho(\cos\psi + i\sin\psi)$

$\rho^n(\cos n\psi + i\sin n\psi) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

Отсюда: $n\psi = \varphi + 2\pi k; \qquad k \in Z.$

$$\boxed{\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)}$$

Таким образом, корень n – ой степени из комплексного числа имеет n различных значений.

<u>Показательная форма комплексного числа.</u>

Рассмотрим показательную функцию $w = e^{z}$; $z = x + iy$.

Можно показать, что функция w может быть записана в виде:

$$\boxed{w = e^{x+iy} = e^{x}(\cos y + i\sin\ y)}$$

Данное равенство называется **уравнением Эйлера.** Вывод этого уравнения будет рассмотрен позднее.

Если в уравнении Эйлера показатель степени принять за чисто мнимое число (*x=0*), то получаем:

$e^{iy} = \cos y + i\sin\ y$

Для комплексно – сопряженного числа получаем:

$e^{-iy} = \cos y - i\sin\ y$

Из этих двух уравнений получаем:

$$\boxed{\begin{cases} \cos y = \dfrac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} \\ \sin\ y = \dfrac{e^{iy} - e^{-iy}}{\ } \end{cases}}$$

Этими формулами пользуются для нахождения значений степеней тригонометрических функций через функции кратных углов.

Если представить комплексное число в тригонометрической форме:

$z = r(\cos\varphi + i\sin\ \varphi)$

и воспользуемся формулой Эйлера: $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\ \varphi$

$$\boxed{z = re^{i\varphi}}$$

Полученное равенство и есть **показательная форма комплексного числа.**

<u>Определение.</u> Функция вида $f(x) = A\ x^n + A\ x^{n-1} + ... + A$ называется **целой рациональной** функцией от x.

<u>Теорема Безу.</u> (Этьенн Безу (1730 – 1783) – французский математик)

При делении многочлена f(x) на разность (x – a) получается остаток, равный f(a).

<u>Доказательство.</u> При делении многочлена *f(x)* на разность (*x – a)* частным будет многочлен *f1(x)* степени на единицу меньшей, чем *f(x),* а остатком – постоянное число *R*.

$$f(x) = f_1(x)(x - a) + R$$

Переходя к пределу при $x \to a$, получаем $f(a) = R$.

<u>Следствие.</u> *Если, a – корень многочлена, т.е. f(a) = 0, то многочлен f(x) делится на (x – a) без остатка.*

<u>Определение.</u> Если уравнение имеет вид *P(x)* = 0, где *P(x)* – многочлен степени *n*, то это уравнение называется **алгебраическим** уравнением степени *n*.

<u>Теорема.</u> (Основная теорема алгебры) *Всякая целая рациональная функция f(x) имеет, по крайней мере, один корень, действительный или комплексный.*

<u>Теорема.</u> *Всякий многочлен n – ой степени разлагается на n линейных множителей вида (x – a) и множитель, равный коэффициенту при* x^n.

<u>Теорема.</u> *Если два многочлена тождественно равны друг другу, то коэффициенты одного многочлена равны соответствующим коэффициентам другого.*

Если среди корней многочлена встречаются кратные корни, то разложение на множители имеет вид:

$$f(x) = A\ (x - a\ )^{k1}\ (x - a\ )^{k2} ...(x - a\ )^{km}\ .$$

$$k_1 + k_2 + ... + k_m = n$$

k_i - кратность соответствующего корня.

Отсюда следует, что *любой многочлен n – ой степени имеет ровно n корней (действительных или комплексных).*

Это свойство имеет большое значение для решения алгебраических уравнений, дифференциальных уравнений и играет важную роль в анализе функций.

Рассмотрим несколько примеров действий с комплексными числами.

Пример. Даны два комплексных числа $z = 1 - \frac{7}{2}i$; $z_2 = -7 - 2i$. Требуется а) найти значение выражения в алгебраической форме, б) для числа $z = 2 - 2\sqrt{3}i$ найти тригонометрическую форму, найти z^{20}, найти корни уравнения $w^3 + z = 0$.

§ 2. Действия над комплексными числами, записанными в алгебраической форме

Алгебраической формой комплексного числа $z = (a, b)$.называется алгебраическое выражение вида

$$z = a + bi.$$

Арифметические операции над комплексными числами $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$, записанными в алгебраической форме, осуществляются следующим образом.

1. Сумма (разность) комплексных чисел

$$z_1 \pm z_2 = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2)\cdot i,$$

т.е. сложение (вычитание) осуществляются по правилу сложения многочленов с приведением подобных членов.

2. Произведение комплексных чисел

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2) + (a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1)\cdot i,$$

т.е. умножение производится по обычному правилу умножения многочленов, с учетом того, что $i^2=1$.

3. Деление двух комплексных чисел осуществляется по следующему правилу:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a_1 + b_1 i)}{(a_2 + b_2 i)} = \frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{a^2 + b^2} = \frac{(a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2) + (b_1 \cdot a_2 - a_1 \cdot b_2)\cdot i}{a^2 + b^2}, \quad (z_2 \neq 0),$$

т.е. деление осуществляется умножением делимого и делителя на число, сопряженное делителю.

Возведение в степень комплексных чисел определяется следующим образом:

$$z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot \ldots \cdot z}_{n\ раз}.$$

Легко показать, что

$$z^n z^m = z^{n+m}, \quad (z^n)^m = z^{nm},$$

$(z\ z)^n = z^n z^n$.

Примеры.

1. Найти сумму комплексных чисел $z_1 = 2 - i$ и $z_2 = -4 + 3i$.

$$z_1 + z_2 = (2 + (-1)\cdot i) + (-4 + 3i) = (2 + (-4)) + ((-1) + 3)\, i = -2+2i.$$

2. Найти произведение комплексных чисел $z_1 = 2 - 3i$ и $z_2 = -4 + 5i$.

$$z_1 \cdot z_2 = (2 - 3i)\cdot(-4 + 5i) = 2\cdot(-4) + (-4)\cdot(-3i) + 2\cdot 5i - 3i\cdot 5i = 7+22i.$$

3. Найти частное z от деления $z_1 = 3 - 2$ на $z_2 = 3 - i$.

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{(3-2i)}{(3-i)} = \frac{(3-2i)(3+i)}{(3-i)(3+i)} = \frac{11-3i}{9+1} = \frac{11}{10} - \frac{3}{10} i.$$

4. Решить уравнение: $3x - (1-i)(x - yi) = 2 + 3i$, x и $y \in \mathbf{R}$.

$$3x - ((x - y) + (-x - y)i) = 2 + 3i$$

$$(2x + y) + (x + y)i = 2 + 3i.$$

В силу равенства комплексных чисел имеем:

$$\begin{cases} 2x + y = 2, \\ x + y = 3, \end{cases}$$

откуда $x = -1$, $y = 4$.

5. Вычислить: i^2, i^3, i^4, i^5, i^6, i^{-1}, i^{-2}.

$i^2 = i \cdot i = -1$

$i^3 = i^2 \cdot i = -i$

$i^4 = i^3 \cdot i = -i \cdot i = -(-1) = 1$

$i^5 = i^4 \cdot i = i$

$i^6 = i^5 \cdot i = i \cdot i = -1$

$i^{-1} = \frac{1}{i} = \frac{i}{i \cdot i} = -i$

$i^{-2} = \frac{1}{i^2} = -1.$

6. Вычислить z^{-3}, если $z = 1 - i$.

$$z^{-3} = (1-i)^{-3} = \frac{1}{(1-i)^3} = \frac{1}{1-3i+3i^2-i^3} = \frac{1}{-2-2i} = \frac{-2+2i}{(-2)^2+(-2)^2} =$$

$$= \frac{-2+2i}{8} = -0.25 + 0.25i.$$

7. Вычислить число z^{-1} обратное числу z =3-i.

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{3-i} = \frac{3+i}{(3-i)(3+i)} = \frac{3+i}{3^2+1^2} = \frac{3+i}{10} = 0.3 + 0.1i.$$

§ 3. Комплексные числа в тригонометрической форме

Комплексной плоскостью называется плоскость с декартовыми координатами (x, y), если каждой точке с координатами (a, b) поставлено в соответствие комплексное число $z = a + bi$. При этом ось абсцисс называется *действительной осью*, а ось ординат – *мнимой*. Тогда каждое комплексное число $a + bi$ геометрически изображается на плоскости как точка A (a, b) или вектор $\overline{OA}$.

Следовательно, положение точки A (и, значит, комплексного числа z) можно задать длиной вектора $|\overline{OA}| = r$ и углом φ , образованным вектором $|\overline{OA}|$ с положительным направлением действительной оси. Длина вектора называется *модулем комплексного числа* и обозначается $|z| = r$, а угол φ называется *аргументом комплексного числа* и обозначается $\varphi = arg\ z$.

Ясно, что $|z| \geq 0$ и $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.

Из рис. 2 видно, что $r = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Аргумент комплексного числа определяется неоднозначно, а с точностью до $2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

Из рис. 2 видно также, что если $z=a+bi$ и $\varphi=arg\ z$, то

$$\cos\varphi = \frac{a}{r}, \qquad \sin\varphi = \frac{b}{r}, \qquad \mathrm{tg}\varphi = \frac{b}{a}.$$

Если $z\in \mathbf{R}$ и $z > 0$, то $arg\ z = 0 + 2\pi k$;

если $z \in \mathbf{R}$ и $z < 0$, то $arg\ z = \pi + 2\pi k$;

если $z = 0$, $arg\ z$ не определен.

Главное значение аргумента определяется на отрезке $0 \le arg\ z \le 2\pi$,

либо $-\pi \le arg\ z \le \pi$.

Примеры:

1. Найти модуль комплексных чисел $z_1 = 4 - 3i$ и $z_2 = -2-2i$.

$$r_1 = |z_1| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{2} = 5;$$

$$r_2 = |z_2| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

2. Определить на комплексной плоскости области, задаваемые условиями:

1) $|z| = 5$; 2) $|z| \le 6$; 3) $|z-(2+i)| \le 3$; 4) $6 \le |z-i| \le 7$.

Решения и ответы:

1) $|z| = 5 \Leftrightarrow \sqrt{a^2+b^2} = 5 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 5^2$ - уравнение окружности радиусом 5 и с центром в начале координат.

2) Круг радиусом 6 с центром в начале координат.

3) Круг радиусом 3 с центром в точке $z_0 = 2 + i$.

4) Кольцо, ограниченное окружностями с радиусами 6 и 7 с центром в точке $z_0 = i$.

3. Найти модуль и аргумент чисел: 1) $z_1 = 1 + \sqrt{3}$; 2) $z_2 = -2 - 2i$.

Указание: при определении главного аргумента воспользуйтесь комплексной плоскостью.

формы записи комплексных чисел к *тригонометрической форме* (*формула Муавра*):

$$z = a + bi = r\cos\varphi + i\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Комплексные числа в тригонометрической форме равны тогда и только тогда, когда равны их модули, а аргументы отличаются на целое число кратное 2π.

(За значение угла берем наименьшее неотрицательное из возможных значенийаргумента.)

Используя формулы $a = r\cos\varphi$, $b = r\sin\varphi$ можно перейти от алгебраической

Действия над комплексными числами, заданными в тригонометрической форме

1. Умножение.

При перемножении чисел z_1 и z_2, заданных в тригонометрической форме, их модули перемножаются, а аргументы складываются:

$$z = z_1 z_2 = r_1 r_2 \cdot (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2$$

)). (Формула справедлива для любого конечного числа сомножителей.)

$$z_1 \ldots z_n = r_1 \ldots r_n\, (\cos(\varphi_1 + \ldots + \varphi_n) + i\sin(\varphi_1 + \ldots + \varphi_n)).$$

и называется *формулой Муавра*. Она показывает, что для возведения комплексного числав натуральную степень нужно возвести в эту степень его модуль, а аргумент умножить на показатель степени.

Формула Муавра $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin\varphi$, $n \in N$) находит много применений. Так, например, если $n = 3$, то, возведя левую часть по формуле сокращенного умножения в куб, получим равенство

$$\cos 3\varphi + i\sin 3\varphi = (\cos^3\varphi - 3\cos\varphi \cdot \sin^2\varphi) + (3\cos^2\varphi \cdot \sin\varphi - \sin^3\varphi)i.$$

Из равенства комплексных чисел и основного тригонометрического тождества получаем

$$\cos 3\varphi = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi,$$
$$\sin 3\varphi = -4\sin^3\varphi + 3\sin\varphi.$$

С помощью формулы Муавра можно находить суммы тригонометрических функций. Например, найдем сумму $\sin x + \sin 3x + \sin 5x + \ldots + \sin(2n-1)x, \quad x \neq \pi k, \quad k \in \mathbf{Z}$.

Рассмотрим сумму

$$S(x) = (\cos x + i\sin x) + (\cos 3x + i\sin 3x) + \ldots + (\cos(2n-1)x + i\sin(2n-1)x).$$

Из формулы Муавра имеем: $(\cos kx + i\sin kx) = (\cos x + i\sin x)^k$.

Таким образом, сумма S(x) примет вид:

$$S(x) = (\cos x + i\sin x) + (\cos x + i\sin x)^3 + \ldots + (\cos x + i\sin x)^{2n-1}.$$

Эта сумма есть геометрическая прогрессия из n слагаемых с первым членом $b_1 = \cos x + i\sin x$ и знаменателем прогрессии $q = (\cos x + i\sin x)^2$. По формуле для суммы n членов геометрической прогрессии, имеем

$$S(x) = \frac{(\cos x + i\sin x) - (\cos x + i\sin x)^{2n+1}}{1-(\cos x + i\sin x)^2} = \frac{(\cos x + i\sin x) - (\cos(2n+1)x + i\sin(2n+1)x)}{1-\cos^2 x + \sin^2 x - 2i\sin x\cos x} =$$

$$= \frac{(\cos x - \cos(2n+1)x) + i(\sin x - \sin(2n+1)x)}{2\sin x(\sin x - i\cos x)} =$$

$$= \frac{((\cos x - \cos(2n+1)x) + i(\sin x - \sin(2n+1)x))(\sin x + i\cos x)}{2\sin x} =$$

$$= \frac{(\cos x - \cos(2n+1)x)\sin x - (\sin x - \sin(2n+1)x)\cos x}{2\sin x} +$$

$$+ i\frac{((\sin x - \sin(2n+1)x)\sin x + (\cos x - \cos(2n+1)x)\cos x)}{2\sin x}.$$

$$\operatorname{Im} S(x) = \frac{\sin^2 x - (\sin(2n+1)x)\sin x + \cos^2 x - (\cos(2n+1)x)\cos x}{2\sin x} = \frac{1-\cos 2nx}{2\sin x} = \frac{\sin^2 nx}{\sin x}.$$

$$\operatorname{Re} S(x) = \frac{\cos x\sin x - (\cos(2n+1)x)\sin x - \sin x\cos x + (\sin(2n+1)x)\cos x}{2\sin x} = \frac{\sin 2nx}{2\sin x}.$$

В исходном выражении для $S(x)$ было:

$$\operatorname{Im} S(x) = \sin x + \sin 3x + \ldots + \sin(2n-1)x,$$

$$\operatorname{Re} S(x) = \cos x + \cos 3x + \ldots + \cos(2n-1)x.$$

Сравнивая мнимые и действительные части, получаем следующие формулы:

$$\sin x + \sin 3x + \ldots + \sin(2n-1)x = \frac{\sin^2 nx}{\sin x},$$

$$\cos x + \cos 3x + \ldots \cos(2n-1)x = \frac{\sin 2nx}{2\sin x}.$$

2. Извлечение корня из комплексного числа

Корнем *n*-ой степени, $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$, из числа z называется любое комплексное число u, для которого n-ая степень равна z:

$$\sqrt[n]{z} = u, \; z = u^n.$$

В поле комплексных чисел справедлива следующая **теорема.**

Для любого $z \neq 0$ извлечение корня n-ой степени, $n \geq 2$, из числа z всегда возможно и имеет ровно n различных значений.

Пусть $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Искомый корень n-ой степени обозначим

$$u = \rho(\cos\theta + i\sin\theta).$$

По определению корня имеем $u^n = z$. Откуда следует, что

$$\rho^n (\cos n\theta + i\sin n\theta) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Из равенства комплексных чисел получаем:

$$\begin{cases} \rho^n = r, \\ n\theta = \varphi + 2\pi k, \quad k \in Z. \end{cases}$$

Так как $r = \sqrt{a^2 + b^2} \geq 0 \;\; \Rightarrow \;\; \rho \geq 0 \;\; \Rightarrow \;\; \rho = \sqrt[n]{r}$.

Таким образом, модуль комплексного числа u определяется как арифметический корень из действительного положительного числа r, а аргумент находят по формуле

$$\theta = \frac{\varphi + 2\pi k}{n}, \quad k = \overline{0, n-1}.$$

§ 4. Формула Эйлера. Показательная форма комплексного числа

Помимо алгебраической и тригонометрической имеется еще *показательная форма записи комплексного числа,* которая широко используется в различных приложениях, в частности в электротехнике.

Пусть $z(\varphi) = \cos\varphi + i\sin\varphi$, зависит от действительной переменной φ.

Сопоставим взаимно однозначным образом каждому комплексному числу $z(\varphi) = \cos\varphi + i\sin\varphi$ комплексно показательное выражение $u(\varphi) = e^{i\varphi}$. С помощью операций дифференцирования можно показать, что эти выражения имеют одну и ту же логическую сущность, в связи с этим полагают по определению

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi .$$

Эта формула называется формулой Эйлера и представляет собой определение комплексной показательной функции $e^{i\varphi}$, где φ – любое действительное число.

Пусть дано комплексное число $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Сопоставляя это с предыдущей формулой, получаем

$$z = re^{i\varphi} .$$

Такая форма записи комплексного числа называется *показательной формой* комплексного числа.

В этой форме записи удобно осуществлять операции умножения, деления, возведения в степень и извлечения корня. Соответствующие формулы записываются следующим образом.

Примеры.

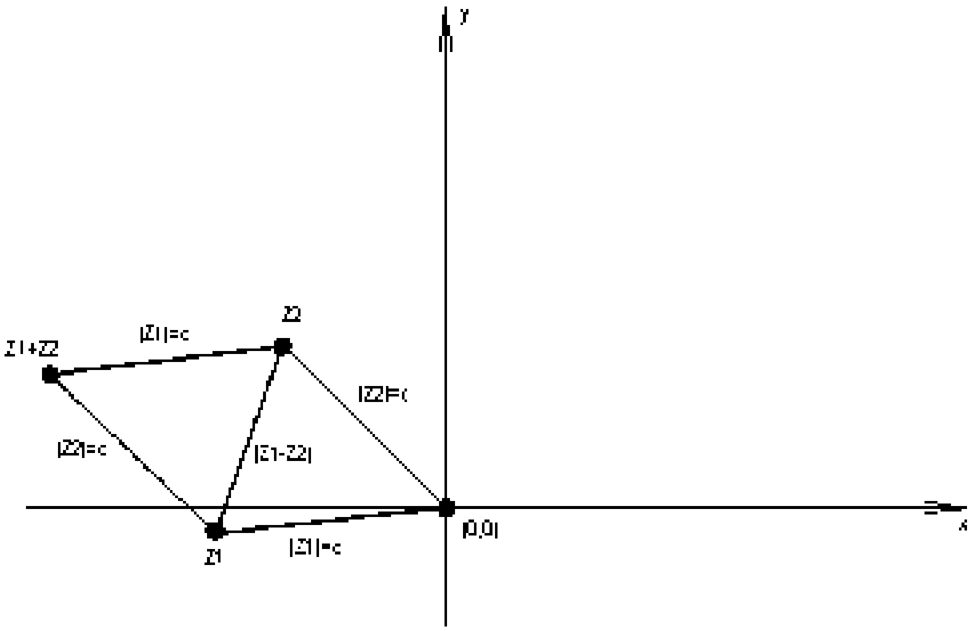
1. Найти показательную форму чисел:

а) $z_1 = 1 + i$; б) $z_2 = -\sqrt{3} - i$.

Решение.

а) $r = |z_1| = \sqrt{2}$, $\varphi = \arg z_1 = \frac{\pi}{4}$, $z_1 = 1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

б) $r = |z_2| = 2$, $\varphi = \arg z_2 = \frac{7\pi}{6}$, $z_2 = -\sqrt{3} - i = 2e^{\frac{7\pi i}{6}}$.



Действительно, точки плоскости, соответствующие комплексным числам 0, z_1, z_2 и $z_1 + z_2$, являются вершинами ромба, для которого $|z_1|$ и $|z_2|$ – длины его сторон, а $|z_1 + z_2|$ и $|z_1 - z_2|$ – длины его диагоналей.

Кроме того, $(z_1 - z_2)(z_3 - z_4) + (z_1 - z_4)(z_2 - z_3) =$

$$= -z_1 z_4 - z_2 z_3 + z_1 z_2 + z_4 z_3 = (z_1 - z_3)(z_2 - z_4) = |z_1 - z_3| \, |z_2 - z_4| .$$

Доказанное равенство известно в планиметрии как теорема Птолемея: произведение длин диагоналей выпуклого вписанного в окружность четырехугольника равно сумме парных произведений длин его противолежащих сторон.

1. Доказать, что если $z = a + bi,$ то $z^{-1} = \dfrac{\bar{z}}{a^2 + b^2}$.

2. Построить точки, соответствующие комплексным числам: $z = x + yi$, для

-1; i; $-$; $-3i$; $2-\sqrt{3}i$; $-4-2i$; $3+i$; $-6+2i$; $2+2i$; $-2+2i$; $-2-2i$.

3. Найти сумму, разность, произведение и частное комплексных чисел, изобразить геометрически данные числа и результаты действий.

1) $z_1 = -2 + i$, $z_2 = 3 - i$;

2) $z_1 = -3$, $z_2 = 4i$.

4. Изобразить геометрическое множество всех комплексных чисел которых:

1) $x = 2$; 2) $1 \le x \le 3$; 3) $\mathrm{Re}\, z = \mathrm{Im}\, z$; 4) $\mathrm{Im}\, z = 2\mathrm{Re}\, z$.

5. Найти модуль и аргумент следующих комплексных чисел и представить их на комплексной плоскости:

1) $z = 1 + i$; 2) $z = \sqrt{3} - i$; 3) $z = \sqrt{\ }-2i$; 4) $z = 2$; 5) $z = □i$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Вычислить:

1) $(3-2i)+(5+3i)$;

2) $(1+2i)-(3-i)$;

3) $3(2-i)\cdot(1-i)$;

4) $(1+3i)(-7+2i)$;

5) $(2-i)^2$;

6) $(1+2i)^3$.

2. Найти решение уравнений ($x, y \in \mathbf{R}$)

1) $(1+i)x+(2+i)y=5+3i$;

2) $2x+(1+i)(x+y)=7+i$;

3) $(3-y+x)(1+i)+(x-y)(2+i)=6-3i$.

1) $z=7-12i$; 2) $z=3+4i$; 3) $z=-3+7i$; 4) $z=i$.

3. Выполнить задание на стр. 20 (учебник: Башмаков М. И. «Математика: учебник для учреждений нач. и сред. проф. образования)

Типовой вариант

1. Следующие комплексные числа изобразить векторами и записать в тригонометрической и показательной формах:

а) $z=4-3i$;

б) $z=(1-i)^3$.

Решение.

а) Для начала найдем модуль и аргумент для данного комплексного числа. Здесь $x=4>0, y=-3<0$,

Модуль (длина) $|z|$ комплексного числа z равна:

$$|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{4^2+(-3)^2}=\sqrt{25}=5.$$

Аргумент φ комплексного числа z равен:

$$\varphi=\arg z=arctg\frac{y}{x}=arctg\frac{-3}{4}\approx-0{,}644 \text{ радиан } (-36{,}87^\circ).$$

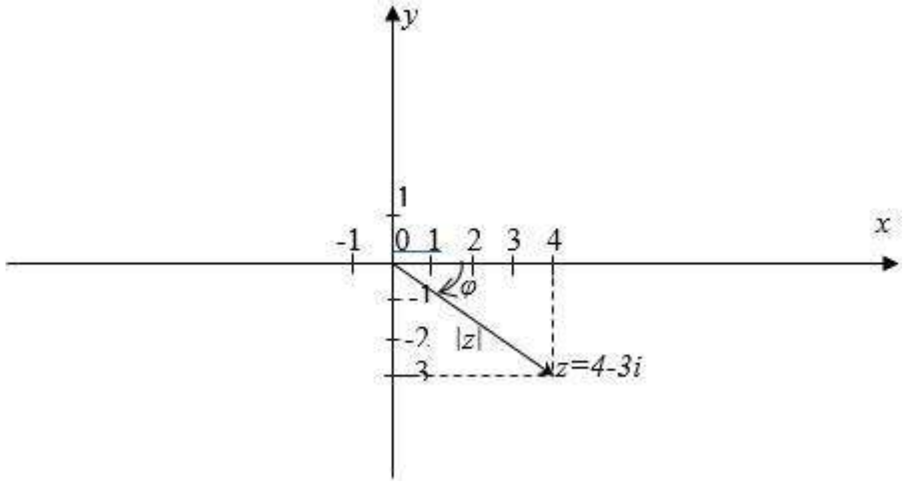
Отсюда тригонометрическая форма данного комплексного числазапишется в виде:

$$z=5\cdot(\cos(-36{,}87^\circ)+i\cdot\sin(-36{,}87^\circ)).$$

Показательная форма будет иметь вид:

$$z=5\cdot e^{-36{,}87^\circ i}.$$

Изобразим данное число в комплексной плоскости



б) Преобразуем сначала данное выражение, приведем его к алгебраической форме записи комплексного числа и учтём такжечто $i^2 = -1$

$$z = (1-i)^3 = (1-i)\cdot(1-i)\cdot(1-i) = (1-2i+i^2)\cdot(1-i) =$$
$$= -2i\cdot(1-i) = -2i+2i^2 = -2-2i.$$

Таким образом получили, что $z = -2-2i$, здесь $x = -2 < 0, y = -2 < 0$.
Теперь по аналогии с пунктом а) находим:

Модуль (длина) $|z|$ комплексного числа z равна:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

Аргумент φ комплексного числа z равен:

$$\varphi = \arg z = arctg\frac{y}{x} = arctg\frac{-2}{-2} - \pi = arctg(1) - \pi = \frac{\pi}{4} - \pi = -\frac{3\pi}{4}.$$

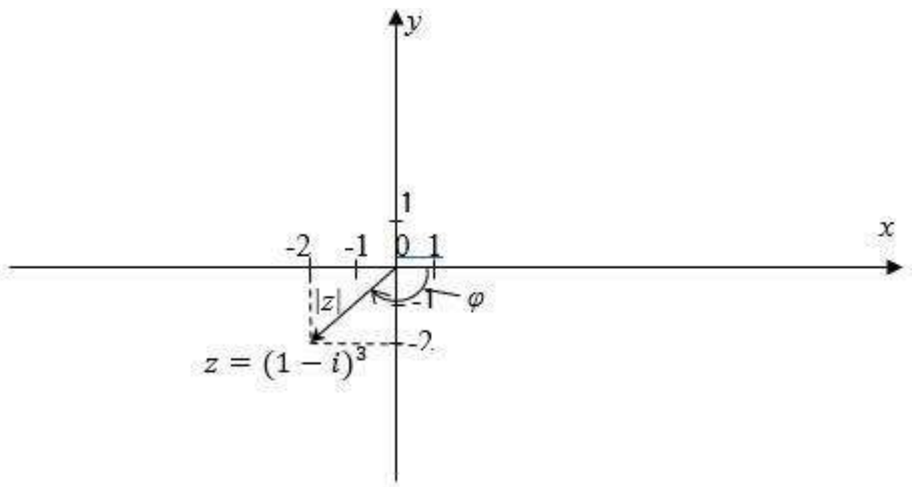
Отсюда тригонометрическая форма данного комплексного числа запишется в виде:

$$z = 2\sqrt{2} \cdot \left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i \cdot \sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right).$$

Показательная форма будет иметь вид:

$$z = 2\sqrt{2} \cdot e^{-\frac{3\pi}{4}i}.$$

Изобразим данное число в комплексной плоскости $\mathbb{C}$



2. Даны комплексные числа

3. а) $z = 3 - 7i$

б) $z = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3$.

Найти $Re\, z, Im\, z, |z|, \arg z$.

Практическое занятие № 6.2 (1) (2 часа)

По теме: Производные суммы, разности произведения, частного

Найти производную функции:

1) $5x^2 + 6x - 7$
2) $-3x^3 + 2x^2 - x - 5$
3) $2\sqrt[4]{x} - \sqrt{x}$
4) $(x^2 - x) \cdot (x^3 + x)$
5) $(x + 2) \cdot \sqrt[3]{x}$
6) $\frac{x^5 + x^3 + x}{x + 1}$
7) $\frac{2x^2}{1 - 7x}$
8) $\frac{\sqrt{x} + x^2 + 1}{x - 1}$
9) $(2x - 3)^5 \cdot (3x^2 + 2x + 1)$
10) $\sqrt[4]{3x + 2} \cdot (3x - 1)^4$

Примечание:

1. На выполнение работы отводится 40 – 45 минут
2. За верно выполненные (5 – 6) заданий ставится оценка «удовлетворительно», за (7 – 8) оценка «хорошо», за (9 – 10) оценка «отлично»

Практическое занятие № 6.4 (1)

По теме: Геометрический и физический смысл производной

Найти значения k и b, если прямая $y = kx + b$ проходит через точку $(x_0;\ y_0)$ и образует с осью Ox угол α:

1) $\alpha = \frac{\pi}{4},\ x_0 = 2,\ y_0 = -3;$
2) $\alpha = \frac{\pi}{4},\ x_0 = -3,\ y_0 = 2;$
3) $\alpha = -\frac{\pi}{3},\ x_0 = 1,\ y_0 = 1;$
4) $\alpha = -\frac{\pi}{6},\ x_0 = -1,\ y_0 = -1.$

Найти угловой коэффициент касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0:

1) $f(x) = x^3,\ x_0 = 1;$
2) $f(x) = \sin x,\ x_0 = \frac{\pi}{4};$
3) $f(x) = \ln x,\ x_0 = 1;$
4) $f(x) = e^x,\ x_0 = \ln 3.$

Найти угол между касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0 и осью Ox:

1) $f(x) = \frac{1}{3}x^3, \ x_0 = 1;$
2) $f(x) = \frac{1}{x}, \ x_0 = 1;$
3) $f(x) = 2\sqrt{x}, \ x_0 = 3;$
4) $f(x) = \frac{18}{\sqrt{x}}, \ x_0 = 3;$
5) $f(x) = e^{\frac{3x+1}{2}}, \ x_0 = 0;$
6) $f(x) = \ln(2x+1), \ x_0 = 2.$

Примечание:

1. На выполнение работы отводится 40 – 45 минут
2. За верно выполненные (7 – 9) заданий ставится оценка «удовлетворительно», за (10 – 12) оценка «хорошо», за (13 – 14) оценка «отлично»

Практическое занятие № 6.4 (2)

По теме: Геометрический и физический смысл производной

Написать уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0:

1) $f(x) = x^2 + x + 1, \ x_0 = 1;$
2) $f(x) = x - 3x^2, \ x_0 = 2;$
3) $f(x) = \frac{1}{x}, \ x_0 = 3;$
4) $f(x) = \frac{1}{x}, \ x_0 = -2;$
5) $f(x) = \sin x, \ x_0 = \frac{\pi}{4};$
6) $f(x) = e^x, \ x_0 = 0;$
7) $f(x) = \ln x, \ x_0 = 1;$
8) $f(x) = \sqrt{x}, \ x_0 = 1.$

Найти производную функции:

1) $2x^4 - x^3 + 3x + 4;$
2) $6\sqrt[3]{x} + \frac{1}{x^2};$
3) $\frac{2}{x^3} - 8\sqrt[4]{x};$
4) $(2x+3)^8;$
5) $(4-3x)^7;$
6) $\sqrt[3]{3x-2}.$

Примечание:

1. На выполнение работы отводится 40 – 45 минут
2. За верно выполненные (7 – 9) заданий ставится оценка «удовлетворительно», за (10 – 12) оценка «хорошо», за (13 – 14) оценка «отлично»

Практическое занятие № 6.5 (1)

По теме: Физический смысл производной в профессиональных задачах

1) Точка движется по закону $s(t) = 1 + 3t$. Найти среднюю скорость движения за промежуток времени от $t = 0{,}8$ до $t = 1$.
2) Найти среднюю скорость движения точки на отрезке $[1; 1{,}2]$, если закон её движения $s = s(t)$ задан формулой $s(t) = t^2$.
3) Найти мгновенную скорость движения точки, если $s(t) = 2 - 3t$.
4) Закон движения задан формулой $s(t) = 0{,}25t + 2$. Найти:

   а) среднюю скорость движения от $t = 4$ до $t = 8$;

   б) скорость движения в моменты $t = 4$ и $t = 8$.
5) Используя определение производной, найти $f'(x)$, если:

   а) $f(x) = 3x + 2$;

   б) $f(x) = 3x^2 - 5x$.
6) С помощью формулы $(kx + b)' = k$ найти производную функции:

   а) $f(x) = 4x$;

   б) $f(x) = -7x + 5$;

   в) $f(x) = -5x - 7$.
7) Найти мгновенную скорость движения точки, если закон её движения $s(t)$ задан формулой $s(t) = 5t^2$.

Примечание:

3. На выполнение работы отводится 40 – 45 минут
4. За верно выполненные 4 задания ставится оценка «удовлетворительно», за (5 – 6) оценка «хорошо», за 7 оценка «отлично»

Практическое занятие № 6.5 (2)

По теме: Физический смысл производной в профессиональных задачах

Найти производную функции:

1) $3^x - e^{-x}$
2) $3\ln x - 2^x$
3) $\ln(x^2 - 2x)$
4) $\cos x - 1$
5) Найти значение производной функции $f(x)$ в точке x_0:

   а) $f(x) = e^{2x-4} + 2\ln x, \quad x_0 = 2$;

   б) $f(x) = e^{3x-2} - \ln(3x - 1), \quad x_0 = \frac{2}{3}$;

в) $f(x) = 2^x - \log_2 x,\ \ x_0 = 1;$

г) $f(x) = \log_{0,5} x - 3^x,\ \ x_0 = 1.$

6) Выяснить, при каких значениях x значение производной функции $f(x)$ равно 0:

а) $f(x) = x - \cos x;$

б) $f(x) = \frac{1}{2}x - \sin x;$

в) $f(x) = 2\ln(x+3) - x;$

г) $f(x) = \ln(x+1) - 2x;$

д) $f(x) = x^2 + 2x - 12\ln x;$

е) $f(x) = x^2 - 6x - 8\ln x.$

Примечание:

1. На выполнение работы отводится 40 – 45 минут
2. За верно выполненные (7 – 9) заданий ставится оценка «удовлетворительно», за (10 – 12) оценка «хорошо», за (13 – 14) оценка «отлично»

Задание: Определить расход бензина при скорости движения 50 км/ч, 80 км/ч, 100 км/ч и наиболее экономичную скорость автомобиля.

Оборудование: Экспериментально установленная формула зависимости расхода бензина (в литрах) от скорости движения ГАЗ-69 (км/ч).

Ход работы.

1. Рассмотреть формулу зависимости расхода бензина от скорости движения $Q = 0{,}003x^2 - 0{,}3x + 18$, где x – скорость движения автомобиля ГАЗ – 69, Q – расход бензина.

2. Записать формулу зависимости $f(x) = 0{,}003x^2 + 0{,}3x + 18$.

3. Исследовать функцию на экстремумы. Найти наиболее экономичную скорость автомобиля ГАЗ -69.

4. Определить расход бензина при скорости движения 50 км/ч, 80 км/ч, 100 км/ч.

5. Сравнить расход бензина.

6. Сделать вывод.

Практическая работа 6.9пм: «Нахождение оптимального результата с помощью производной в практических задачах» (3 часа)

Тема: **Задачи на максимум и минимум.**

Цель: научиться применять производную для отыскания наибольших и наименьших значений величин.

I вариант	**II вариант**
1. *Контрольные вопросы*	
а) что такое критические точки функции? б) что такое экстремумы функции?	
2. *Решить задачу*:	
1) Сумма двух целых чисел равна 24. Найти эти числа, если их произведение принимает наибольшее значение. 2) Площадь прямоугольника составляет 16 см^2. Каковы его размеры, если периметр принимает наименьшее значение.	3) Разность двух чисел равна 10. Найти эти числа, если известно, что их произведение принимает наименьшее значение. 4) Площадь прямоугольника составляет 64 см^2. Каковы должны быть его размеры, чтобы периметр прямоугольника был наименьший?

5. Задание: Определить расход бензина при скорости движения 50 км/ч, 80 км/ч, 100 км/ч и наиболее экономичную скорость автомобиля.

Оборудование: Экспериментально установленная формула зависимости расхода бензина (в литрах) от скорости движения ГАЗ-69 (км/ч).

Ход работы.

1. Рассмотреть формулу зависимости расхода бензина от скорости движения $Q = 0{,}003x^2 - 0{,}3x + 18$, где *x* – скорость движения автомобиля ГАЗ – 69, *Q* – расход бензина.

2. Записать формулу зависимости $f(x) = 0{,}003x^2 + 0{,}3x + 18$.

3. Исследовать функцию на экстремумы. Найти наиболее экономичную скорость автомобиля ГАЗ -69.

4. Определить расход бензина при скорости движения 50 км/ч, 80 км/ч, 100 км/ч.

5. Сравнить расход бензина.

6. Сделать вывод.

7. Работа с теоретическим материалом: на стр. 185-190 (учебник: Башмаков М. И. «Математика: учебник для учреждений нач. и сред. проф. Образования)

Практическая работа 7.7пм:

Примеры симметрии (3 часа)

Цель работы: Разобрать виды симметрии. С чем связано использование симметричных деталей при изготовлении автомобиля**.**

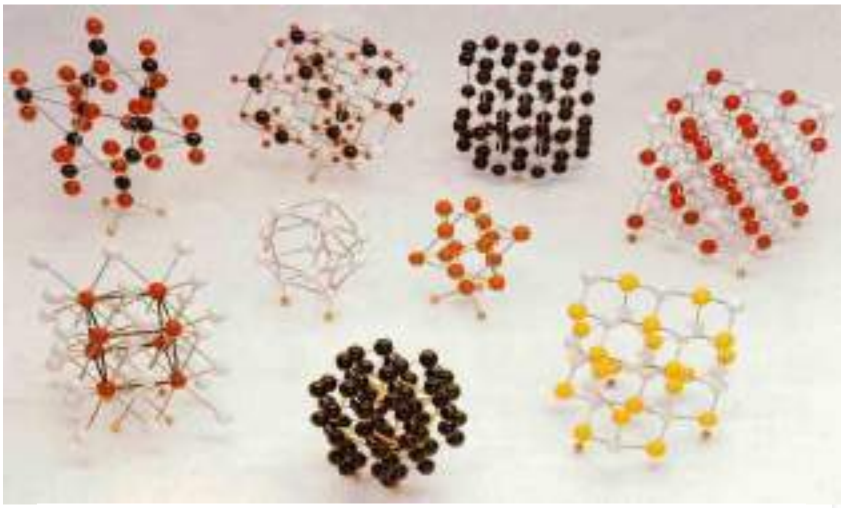
Симметрия в легковых автомобилях

Под симметрией понимают такой порядок в построение формы, при котором соблюдается соразмерность, пропорциональность и расположении частей и целого относительно осевой линии, центра. Симметрия встречается везде как в живой так и не живой природе: в растениях, кристаллах, в животном мире, живописи, архитектуре, технике. Даже организм человека устроен по законам симметрии. Она не только радует глаз, но и позволяет живым организмам лучше приспособится к среде обитания и просто выжить, а в технике позволяет создавать наиболее целесообразные и функциональные современные изделия.

Различают осевую (относительно прямой), зеркальную (относительно плоскости), центральную (относительно точки), поворотную (билатеральную), скользящую (переносную), винтовую симметрии. Практически все эти виды симметрии присутствуют в автостроении.

С чем же связано использование симметричных деталей при изготовлении легкового автомобиля? В технике красота, соразмерность механизмов часто бывает связана с их надежностью, устойчивостью в работе. Симметричная форма технического средства обеспечивает хорошую обтекаемость воздухом или водой, а значит, и минимальное сопротивление движению. В технике существует своего рода постулат: наиболее целесообразные и функционально совершенные изделия являются наиболее красивыми. Вспомните технические объекты - самолеты, мосты, автомашины, ракеты, молотки, гайки - практически все они от мала до велика обладают той или иной симметрией. Сама природа подсказывает нам о наилучшей организации предметов через применение законов симметрии на примере базовой единицы создания технического средства - кристаллической решётки металла.

Как правило, основным составляющим веществом любого автомобиля является металл: алюминий, медь, железо и др. Каждый металл состоит из атомов. Они располагаются в нем не хаотично, а очень правильно и последовательно. Так вот, если мысленно соединить



все эти частицы в одну структуру, то получится красивое изображение в виде правильного геометрического тела какой-либо формы. Это и принято называть кристаллической решеткой металла.

Осевая симметрия просматривается и при изготовлении металлического профиля различной конфигурации, используемого для построения каркаса и изготовлении деталей любого современного технического средства. Симметричность металлического профиля носит прикладное значение: удобно упаковывать и доставлять его заводу изготовителю, а также обрабатывать на прокатных станах.

Неотъемлемым атрибутом для создания большинства деталей автомобильного транспорта является токарный станок, составляющими элементами которого являются, в основном, тела вращения: цилиндр, конус, обладающие зеркальной симметрией. В основе его работы лежит центральная симметрия, так как обтачивающие движения станка осуществляются по кругу. Работу этого же

станка можно связать с поворотной симметрией, так как детали и сами элементы токарного станка в процессе работы постоянно находятся в движении, являясь фактически вращательным механизмом для создания деталей технического средства.

Неприятно думать об этом, но представьте себе, что произойдет, если ваш автомобиль протаранит кирпичную стену на скорости в 100 км/ч. Металл соберется в гармошку. Лобовое стекло разобьется. Раскроются подушки безопасности, чтобы защитить вас и ваших пассажиров, если вы пристегнуты ремнем безопасности, конечно. Но, даже учитывая все достижения в области активной безопасности, которые мы на сегодняшний день имеем в наших автомобилях, это, вероятнее всего, будет очень тяжелая авария с очень тяжелыми последствиями. Ни один автомобиль не предназначен для того, чтобы проходить сквозь кирпичные стены.

Но есть еще один тип «стен», проходить сквозь которые может любой автомобиль, мы говорим о стенах воздуха, который давит на автомобиль при очень высоких скоростях.

Большинство из нас не думают о воздухе или о ветре, как о стене. На низких скоростях, и в практически безветренную погоду, очень сложно заметить, как поток воздуха взаимодействует с вашим транспортным средством. Но на высоких скоростях, и в особенно ветреные дни, сопротивление воздуха (сила, воздействующая на движущийся по воздуху объект – также определяемая как сопротивление) имеет огромное влияние на то, как автомобиль ускоряется, насколько он управляем и насколько эффективный расход топлива он обеспечивает.

Именно изучением сил, которые являются результатом движения в воздухе, занимается наука аэродинамика. В течение многих десятилетий автомобили разрабатываются с учетом аэродинамики, автопроизводители изобрели инновации, которые делают прохождение автомобиля сквозь стены из «воздуха» легче и менее заметным в повседневной езде.

По сути, то, что автомобиль разработан с учетом сопротивления воздушного потока означает, что он имеет меньше трудностей при ускорении и может достичь эффективного расхода топлива, так как двигателю не нужно будет перерабатывать, чтобы «протолкнуть» автомобиль сквозь воздушную стену.

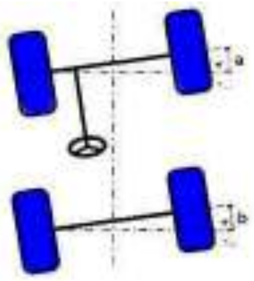
Инженеры разработали несколько способов, которые помогают улучшить аэродинамику транспортного средства. Например, более округлые формы во внешнем дизайне автомобиля, которые направляют воздушный канал таким образом, чтобы он обтекал

кузов авто с наименьшим сопротивлением, которое только возможно. Некоторые высокопроизводительные автомобили даже оснащены такими деталями, которые направляют поток воздуха по нижней части автомобиля. Многие из таких транспортных средств также оснащены антикрылом – более известным, как спойлер – которое предотвращает подъем задних колес автомобиля из-за сильного потока воздуха, и делает его более устойчивым при высоких скоростях. Конечно не все антикрылья одинаковы, и, как правило, устанавливаются на автомобиль симметрично, в согласии с его внешним видом.

Интерьер автомобиля производит впечатление своей симметрией и объемом". Взгляните на силуэт автомобиля, - предложил специально обученный человек, - Так выглядит практически любая машина, оставленная в снегопад без движения. Ветер плавно обдувает

ее кузов, оставляя где-то больше снега, а где-то меньше. Стало быть, силуэт этот подсказан самой природой, а потому он более чем гармоничен". Машина, как и любой вид транспорта, обладает осевой продольной симметрией. Некоторые детали машин имеют центральную симметрию: колесо автомобиля, шестеренка и др. При моделировании автомобильных дисков, для расчетов применяют поворотную симметрию. Регулировка схождения колес автомобиля производится относительно продольной оси симметрии машины. Для наземного вида транспорта в большей степени характерна осевая симметрия. Причиной этого является направление его движения.

Автомобиль, одинаково хорошо поворачивающий и в право и влево, обладает билатеральной симметрией, чего нельзя сказать о мотоцикле с коляской, который такой симметрией не обладает и постепенно вытесняется автомобилем и своим двухколёсным (зеркально-симметричным) собратом.



На примере работы поршней двигателя можно рассмотреть ещё один вид симметрии - переносную (скользящую) симметрию.

Одной из важнейших составляющих любого современного легкового автомобиля является трансмиссия, конструктивным элементом которой считается дифференциал. Дифференциал предназначен для передачи, изменения и распределения крутящего момента между двумя потребителями и обеспечения, при необходимости, их вращения с разными угловыми скоростями.

Симметричный дифференциал распределяет крутящий момент по осям в равных соотношениях, независимо от величины угловых скоростей ведущих колес. Благодаря этим свойствам симметричный дифференциал используется в качестве межколесного дифференциала.

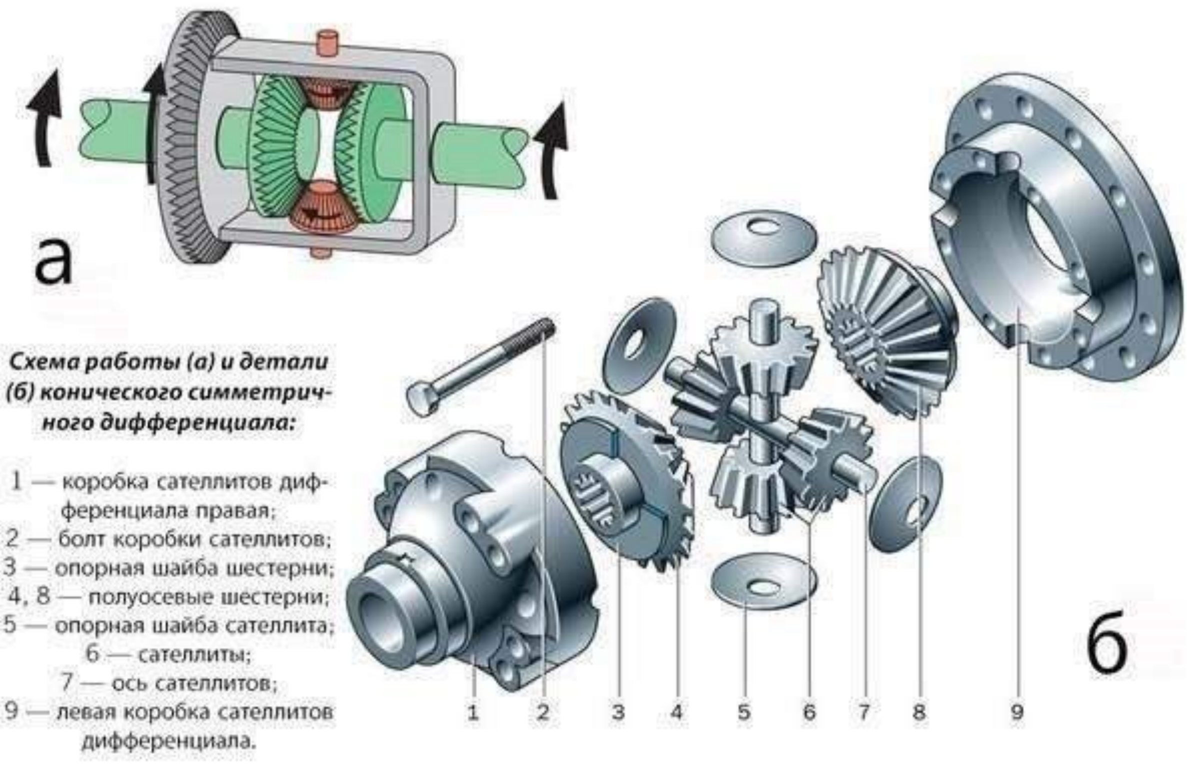


Схема работы (а) и детали (б) конического симметричного дифференциала:

1 — коробка сателлитов дифференциала правая;
2 — болт коробки сателлитов;
3 — опорная шайба шестерни;
4, 8 — полуосевые шестерни;
5 — опорная шайба сателлита;
6 — сателлиты;
7 — ось сателлитов;
9 — левая коробка сателлитов дифференциала.

В работе симметричного межколесного дифференциала можно выделить три характерных режима:

1. прямолинейное движение;
2. движение в повороте;
3. движение по скользкой дороге.

При прямолинейном движении колеса встречают равное сопротивление дороги. Крутящий момент от главной передачи передается на корпус дифференциала, вместе с которым перемещаются сателлиты. Сателлиты, обегая полуосевые шестерни, передают крутящий момент на ведущие колеса в равном соотношении. Так как сателлиты на осях не вращаются, полуосевые шестерни движутся с равной угловой скоростью. При этом частота вращения каждой из шестерен равна частоте вращения ведомой шестерни главной передачи.

Конструкция автомобиля складывалась в течение многих десятилетий: от колесниц и простых повозок до совершенных симметричных современных автомобилей, предлагаемых маркой Субару. Это новое слово в конструкции полноприводных серийных автомобилей было сказано инженерами Subaru, одними из первых начавших выпуск транспортных средств, на которых стандартно устанавливался симметричный полный привод и оппозитный двигатель.

Оппозитный двигатель представляет собой форму устройства двигателя внутреннего сгорания автомобиля, имеющий особую структуру: его поршни расположены под развернутым углом и осуществляют движение в горизонтальной плоскости навстречу друг другу и в обратные стороны (друг от друга). Другая, соседняя пара поршней, располагается в одном положении (например, вверху). Таким образом, на примере этого двигателя мы можем наблюдать зеркальную и скользящую симметрии.

Симметричный привод-двигатель, КПП, кардан, рудуктора находятся по центру кузова автомобиля, привода к колесам, левые и правые, одинаковой длинны, чем достигается 25% мощности на каждое из 4-х колес.

Характерная черта автомобилей Subaru, это невероятная устойчивость на дороге, не зависимо от её состояния. Эта способность появилась благодаря уникальной системе полного привода AWD, которая устанавливается на каждой сошедшей с конвейера машине. Вся система идеально симметрична относительно продольной оси автомобиля. Равномерно распределяющаяся на все четыре колеса нагрузка обеспечивает исключительную устойчивость во время движения и совершения манёвров.

Любая дорога, особенно в России, имеет неравномерное покрытие. Встречающиеся на асфальте ямы, скользкие участки, да и просто лужи при движении на большой скорости могут стать причиной потери управления автомобилем. Полный привод AWD позволяет избежать потери управления, контролируя сцепление каждого из колёс каждый момент. При проскальзывании одного из колёс автомобиль реагирует, предотвращая занос. Повышается курсовая устойчивость при движении на высоких скоростях, машина не «рыскает» на неровностях или колейной дороге.

В сложных погодных условиях сцепление шин с дорогой заметно ухудшается. Скользкая дорога, покрытая свежевыпавшим снегом, это практически непреодолимое препятствие для автомобиля с приводом на два колеса. Если вязнет любое из них, водитель практически обречён на поиск посторонней помощи. Полноприводная система AWD, установленная в автомобилях Subaru, придаёт даже исключительно городским автомобилям мощь и проходимость внедорожников. Если любое из колёс теряет сцепление с дорогой, нагрузка перераспределяется на остальные и машина продолжает движение.

На скоростном шоссе, преодолевая даже не очень крутые, на первый взгляд, повороты, автомобиль с приводом на два колеса неожиданно может сорваться в занос. Это происходит из-за постепенно и незаметно увеличивающейся центробежной силы, воздействующей на него во время манёвра. Прекрасный баланс всех конструкций системы полного привода Subaru и усилие, которое передаётся на каждое колесо, позволяют идеально соблюсти выбранную траекторию движения.

Таким образом, современный легковой автомобиль является ярким примером эффективного применения различных видов симметрии в технике для создания совершенных конструкций, обеспечивающих её надёжность, высокую устойчивость на дороге, лёгкость в управлении, хорошую динамику разгона, безопасность при движении.

Задание: 1.Сделать конспект. 2. Ответить на следующие вопросы:1) Виды симметрии. 2) С чем связано использование симметричных деталей при изготовлении легкового автомобиля 3) Перечислите симметричные детали в автомобиле . 4) Построить на плоскости различные виды симметрии геометрических фигур.

Практическое занятие № 7.8 (1)

По теме: Правильные многогранники, их свойства

Задача 1

Сколько плоскостей симметрии имеет: а) правильная четырёхугольная призма, отличная от куба; б) правильная четырёхугольная пирамида; в) правильная треугольная пирамида?

Задача 2

Ребро куба равно **а**. Найдите площадь сечения, проходящего через диагонали двух его граней.

Задача 3

От каждой вершины правильного тетраэдра с ребром 2 отсекают тетраэдр с ребром 1. Какая фигура получится в результате?

Примечания:

1. На выполнение работы отводится 40 – 45 минут
2. За верно выполненные 2 задания ставится оценка «удовлетворительно», за незначительные ошибки (при условии что все задачи решены) оценка «хорошо», за 3 оценка «отлично»

Практическое занятие № 7.8 (2)

По теме: Правильные многогранники, их свойства

Задача 1

Сторона основания правильной треугольной призмы равна 8 см, боковое ребро равно 6 см. Найдите площадь сечения, проходящего через сторону верхнего основания и противолежащую вершину нижнего основания.

Задача 2

Через два противолежащих ребра куба проведено сечение, площадь которого равна $64\sqrt{2}$ см^2. Найдите ребро куба и его диагональ.

Задача 3

В правильной n-угольной призме сторона основания равна a и высота равна h. Вычислите площади боковой поверхности и полной поверхности призмы, если:

а) n = 3, a = 10 см, h = 15 см;

б) n = 4, a = 12 дм, h = 8 дм;

в) n = 6, a = 23 см, h = 5 дм;

г) n = 5, a = 0,4 м, h = 10 см.

Примечания:

1. На выполнение работы отводится 40 – 45 минут
2. За верно выполненные 2 задания ставится оценка «удовлетворительно», за незначительные ошибки (при условии что все задачи решены) оценка «хорошо», за 3 оценка «отлично»

Практическая работа 7.16: «Геометрические комбинации на практике» (4 часа)

Цель: Используя различные комбинации решать задачи.
<u>Цилиндр + прямоугольный параллелепипед</u>

1. Прямоугольный параллелепипед описан около цилиндра, радиус основания и высота которого равны 5,5. Найдите объем параллелепипеда.
2. Прямоугольный параллелепипед описан около цилиндра, радиус основания и высота которого равны 9. Найдите объем параллелепипеда.
3. Прямоугольный параллелепипед описан около цилиндра, радиус основания и высота которого равны 2. Найдите объем параллелепипеда.
4. Прямоугольный параллелепипед описан около цилиндра, радиус основания и высота которого равны 1. Найдите объем параллелепипеда.
5. Прямоугольный параллелепипед описан около цилиндра, радиус основания которого равен 5. Объем параллелепипеда равен 50. Найдите высоту цилиндра.
6. Прямоугольный параллелепипед описан около цилиндра, радиус основания которого равен 4. Объем параллелепипеда равен 32. Найдите высоту цилиндра.
7. Прямоугольный параллелепипед описан около цилиндра, радиус основания которого равен 4. Объем параллелепипеда равен 64. Найдите высоту цилиндра.
8. Прямоугольный параллелепипед описан около цилиндра, радиус основания которого равен 1. Объем параллелепипеда равен 8. Найдите высоту цилиндра.
9. Прямоугольный параллелепипед описан около цилиндра, радиус основания которого равен 3. Объем параллелепипеда равен 36. Найдите высоту цилиндра.
10. Прямоугольный параллелепипед описан около цилиндра, радиус основания которого равен 9. Объем параллелепипеда равен 81. Найдите высоту цилиндра.

<u>Цилиндр + призма</u>

1. В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник с катетами 10 и 9. Боковые ребра равны $2/\pi$. Найдите объем цилиндра, описанного около этой призмы.
2. В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник с катетами 5 и 6. Боковые ребра равны $10/\pi$. Найдите объем цилиндра, описанного около этой призмы.
3. В основании прямой призмы лежит квадрат со стороной 9. Боковые ребра равны $1/\pi$. Найдите объем цилиндра, описанного около этой призмы.

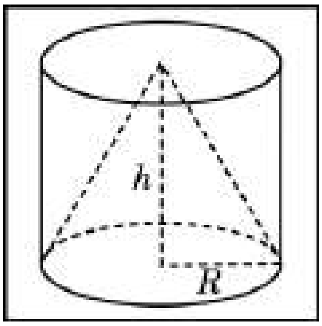
4. В основании прямой призмы лежит квадрат со стороной 4. Боковые ребра равны $9/\pi$. Найдите объем цилиндра, описанного около этой призмы.
5. В основании прямой призмы лежит квадрат со стороной 7. Боковые ребра равны $3/\pi$. Найдите объем цилиндра, описанного около этой призмы.
6. В основании прямой призмы лежит квадрат со стороной 2. Боковые ребра равны $4/\pi$. Найдите объем цилиндра, описанного около этой призмы.
7. В цилиндр вписана прямая призма, в основании которой лежит прямоугольный треугольник. Как расположена ось цилиндра по отношению к граням прямой призмы? Можно ли утверждать, что две боковые грани прямой призмы взаимно перпендикулярны?

Цилиндр + конус

1. Цилиндр и конус имеют общее основание и общую высоту. Вычислите объем цилиндра, если объем конуса равен 40.
2. Цилиндр и конус имеют общее основание и общую высоту. Вычислите объем цилиндра, если объем конуса равен 10.
3. Цилиндр и конус имеют общее основание и общую высоту. Вычислите объем цилиндра, если объем конуса равен 20.
4. Цилиндр и конус имеют общее основание и общую высоту. Вычислите объем цилиндра, если объем конуса равен 21.
5. Цилиндр и конус имеют общее основание и общую высоту. Вычислите объем цилиндра, если объем конуса равен 25.
6. Цилиндр и конус имеют общее основание и общую высоту. Вычислите объем цилиндра, если объем конуса равен 14.
7. Цилиндр и конус имеют общее основание и общую высоту. Вычислите объем цилиндра, если объем конуса равен 23.
8. Цилиндр и конус имеют общее основание и общую высоту. Вычислите объем цилиндра, если объем конуса равен 42.
9. Цилиндр и конус имеют общее основание и общую высоту. Вычислите объем цилиндра, если объем конуса равен 120.
10. Цилиндр и конус имеют общее основание и общую высоту. Вычислите объем цилиндра, если объем конуса равен 36.
11. Цилиндр и конус имеют общее основание и общую высоту. Вычислите объем цилиндра, если объем конуса равен 48.
12. Цилиндр и конус имеют общее основание и общую высоту. Вычислите объем цилиндра, если объем конуса равен 60.
13. Цилиндр и конус имеют общее основание и общую высоту. Вычислите объем цилиндра, если объем конуса равен 84.
14. Цилиндр и конус имеют общее основание и общую высоту. Вычислите объем цилиндра, если объем конуса равен 14.
15. Цилиндр и конус имеют общее основание и общую высоту. Вычислите объем цилиндра, если объем конуса равен 11.

16. В конус вписан цилиндр с квадратным осевым сечением. Площадь боковой поверхности цилиндра равна площади основания конуса. Найдите угол а наклона образующей конуса к плоскости его основания.

17. Цилиндр и конус имеют общее основание и общую высоту. Вычислите объем цилиндра, если объем конуса равен 25.



Цилиндр + шар

1. Около шара описан цилиндр. Найдите отношение их объёмов и отношение площадей их поверхностей.
2. цилиндр, площадь боковой поверхности которого составляет 2/5 площади сферы. Найдите отношение высоты цилиндра к диаметру его основания.

Конус + пирамида

1. Во сколько раз объем конуса, описанного около правильной четырехугольной пирамиды, больше объема конуса, вписанного в эту пирамиду.
2. В конус вписана пирамида, в основании которой лежит прямоугольный треугольник. Как расположена ось конуса по отношению к граням пирамиды?

Конус + сфера

1. В сферу вписан конус, радиус основания которого равен ½ радиуса сферы. Найдите угол при вершине осевого сечения конуса.
2. Около сферы радиуса r описан конус, высота которого равна h. Найдите площадь полной поверхности конуса.
3. В конус вписана сфера. Площадь сферы составляет 2/3 площади боковой поверхности конуса. Найдите образующую конуса, если радиус его основания равен R.
4. Около сферы радиуса 2 см описан конус, высота которого равна 6 см. Найдите площадь полной поверхности конуса

Конус + шар

1. В шар радиуса R вписан конус. Объём конуса составляет ¼ объёма шара. Найдите высоту конуса.

2. Около шара радиуса 6 описан конус, объём которого в два раза больше объёма шара. Найдите высоту конуса.
3. В конус вписан шар. Докажите, что отношение площади полной поверхности конуса к площади поверхности шара равно отношению их объёмов.
4. В конус вписан шар, площадь поверхности которого равна площади основания конуса. Какую часть объёма конуса составляет объём шара?
5. В конус вписан шар и через их линию касания проведена плоскость. Найдите отношение объёма отсечённого конуса к объёму данного, если угол при вершине осевого сечения конуса равен 2α.
6. В конус, осевое сечение которого – равносторонний треугольник, вписан шар. Найдите объем конуса, если объем шара равен 8.

<u>Усеченный конус + сфера</u>

1. Около сферы описан усечённый конус, образующая которого составляет с большим основанием угол 45^0. Площадь сферы равна 200 см^2. Найдите площадь боковой поверхности усечённого конуса.
2. Площадь сферы составляет 3/4 площади поверхности описанного около сферы усечённого конуса. Найдите радиусы оснований усечённого конуса и радиус сферы, если образующая усечённого конуса равна 12.
3. В сферу радиуса R вписан усечённый конус, образующая которого равна R √2, а угол наклона её к плоскости нижнего основания равен a. Найдите площадь полной поверхности усечённого конуса.
4. В сферу радиуса R вписан усечённый конус, образующая которого составляет с плоскостью основания угол b. Угол между диагоналями в осевом сечении конуса, обращённый к основанию, равен a. Найдите площадь осевого сечения конуса.
5. В сферу радиуса R вписан усечённый конус, высота которого равна h. Диагонали осевого сечения конуса перпендикулярны. Найдите объём усечённого конуса. Имеет ли задача решение, если а) h =2/3R, б) h =3/2R?

<u>Сфера + прямоугольный параллелепипед</u>

1. Прямоугольный параллелепипед описан около сферы радиуса 6. Найдите его объем.
2. Прямоугольный параллелепипед описан около сферы радиуса 8. Найдите его объем.
3. Прямоугольный параллелепипед описан около сферы радиуса 9.5 . Найдите его объем.
4. Прямоугольный параллелепипед описан около сферы радиуса 1. Найдите его объем.

<u>Конус + пирамида</u>

3. Во сколько раз объем конуса, описанного около правильной четырехугольной пирамиды, больше объема конуса, вписанного в эту пирамиду.

4. В конус вписана пирамида, в основании которой лежит прямоугольный треугольник. Как расположена ось конуса по отношению к граням пирамиды?

Конус + сфера

5. В сферу вписан конус, радиус основания которого равен ½ радиуса сферы. Найдите угол при вершине осевого сечения конуса.
6. Около сферы радиуса r описан конус, высота которого равна h. Найдите площадь полной поверхности конуса.
7. В конус вписана сфера. Площадь сферы составляет 2/3 площади боковой поверхности конуса. Найдите образующую конуса, если радиус его основания равен R.
8. Около сферы радиуса 2 см описан конус, высота которого равна 6 см. Найдите площадь полной поверхности конуса

Конус + шар

7. В шар радиуса R вписан конус. Объём конуса составляет ¼ объёма шара. Найдите высоту конуса.
8. Около шара радиуса 6 описан конус, объём которого в два раза больше объёма шара. Найдите высоту конуса.
9. В конус вписан шар. Докажите, что отношение площади полной поверхности конуса к площади поверхности шара равно отношению их объёмов.
10. В конус вписан шар, площадь поверхности которого равна площади основания конуса. Какую часть объёма конуса составляет объём шара?
11. В конус вписан шар и через их линию касания проведена плоскость. Найдите отношение объёма отсечённого конуса к объёму данного, если угол при вершине осевого сечения конуса равен 2α.
12. В конус, осевое сечение которого – равносторонний треугольник, вписан шар. Найдите объем конуса, если объем шара равен 8.

Усеченный конус + сфера

6. Около сферы описан усечённый конус, образующая которого составляет с большим основанием угол 45^0. Площадь сферы равна 200 см^2. Найдите площадь боковой поверхности усечённого конуса.
7. Площадь сферы составляет3/4 площади поверхности описанного около сферы усечённого конуса. Найдите радиусы оснований усечённого конуса и радиус сферы, если образующая усечённого конуса равна 12.
8. В сферу радиуса R вписан усечённый конус, образующая которого равна R √2, а угол наклона её к плоскости нижнего основания равен а. Найдите площадь полной поверхности усечённого конуса.
9. В сферу радиуса R вписан усечённый конус, образующая которого составляет с плоскостью основания угол b. Угол между диагоналями в осевом сечении конуса, обращённый к основанию, равен а. Найдите площадь осевого сечения конуса.
10. В сферу радиуса R вписан усечённый конус, высота которого равна h. Диагонали осевого сечения конуса перпендикулярны. Найдите объём усечённого конуса. Имеет ли задача решение, если а) h =2/3R, б) h =3/2R?

Сфера + прямоугольный параллелепипед

5. Прямоугольный параллелепипед описан около сферы радиуса 6. Найдите его объем.
6. Прямоугольный параллелепипед описан около сферы радиуса 8. Найдите его объем.
7. Прямоугольный параллелепипед описан около сферы радиуса 9.5 . Найдите его объем.
8. Прямоугольный параллелепипед описан около сферы радиуса 1. Найдите его объем.
9. Объем прямоугольного параллелепипеда, описанного около сферы, равен 216. Найдите радиус сферы.
10. Объем прямоугольного параллелепипеда, описанного около сферы, равен 125. Найдите радиус сферы.
11. Объем прямоугольного параллелепипеда, описанного около сферы, равен 343. Найдите радиус сферы.

1) Определить объём кузова автомобиля ГАЗ-53, если его длина 3,8м, ширина – 2,6м, высота бортов 80 см. Как изменится объем кузова, если его борта «нарастить» вдвое?

2) Вычислить объём дизтоплива в цистерне диаметром 2м и длиной 3м, если она заполнена на 2/3 объёма.

3) Сколько брезента необходимо для пошива тента для кузова автомобиля формы прямоугольного параллелепипеда, имеющие размеры: 3 х 1,50 х 2 м?

4) Сколько понадобится арматуры для изготовления каркаса кузова для автомобиля КАМАЗ, имеющего форму прямоугольного параллелепипеда с измерениями: 2 х 1,5 х 2?

5). Чему равен суммарный рабочий объем в дм3 10 цилиндров двигателя ЯМЗ - 740 (КамАЗ), если диаметр одного цилиндра 120 мм., ход поршня 120 мм?

6) Подсчитайте суммарный рабочий объем в дм3 6 цилиндров двигателя ЯМЗ- 236, если диаметр цилиндра 130 мм, ход поршня 140 мм?

7) Найдите объем камеры сгорания двигателя автомобиля КРАЗ, если диаметр поршня 100 мм., ход поршня 150 мм?

8). На сколько увеличится объем камеры сгорания двигателя автомобиля ГАЗ -53, если диаметр поршня 10 см., ход поршня 9 см?

9) Размеры кузовов самосвалов МАЗ — 205 и КРАЗ соответственно равны (м): 6,07х2,64х2,44 и 6,72х2,39х2,18.

Какой из них более вместителен?

10) Вычислите полную поверхность клапана двигателя внутреннего сгорания ЯМЗ - 236, если высота его цилиндрической части 30 мм, высота всего клапана 45 мм, диаметр цилиндрической части 1 0 мм, диаметр тарелки клапана 30 мм.

11) Втулка сепаратора грузового устройства имеет форму цилиндра, высверленного по оси. Внешний диаметр втулки 20 мм, диаметр отверстия 12 мм, длина втулки 100 мм. Найдите площадь диагонального сечения втулки.

12) Резервуар для бензина состоит их полушара диаметром 1,4 дм и цилиндра с таким же радиусом основания. Какой высоты должна быть цилиндрическая часть, чтобы весь резервуар мог вместить 1200 л?

13) Масса шагающего экскаватора 120 т. Во время работы он опирается на стальную цилиндрическую плиту (плотность 7,8 г/см3) высотой 1,2 м, причем давление на грунт составляет 75000 Па. Определить процент пустот в плите, если ее масса равна 120 т.

14). Рассчитать литраж двигателя автомобиля, если диаметр

15) Как увеличится объем камеры сгорания двигателя автомобиля ГАЗ – 53, если диаметр поршня 10см, а ход поршня 9см?

16) Вычислите объем горючего, необходимого для работы четырехцилиндрового двигателя, если диаметр цилиндра 110мм, а ход поршня 125мм.

17) Сколько брезента необходимо для пошива тента для кузова машины формы прямоугольного параллелепипеда – имеющего размеры: 3x1.50x2 м.

18) Хватит ли 20 м арматуры для изготовления каркаса кузова для КАМАЗа, имеющего форму прямоугольного параллелепипеда, с измерениями: 2x1,5x2м?

19) Куча щебня имеет форму конуса, радиус основания которого 20м, а образующая 70м. Сколько потребуется таких куч щебня, чтобы загрузить БЕЛАЗ грузоподъемностью 40т? Плотность щебня 1300кг/м3.

20) Для перевозки горюче-смазочных материалов применяются цистерны. Кузов цистерны представляет собой металлический котел цилиндрической формы со сферическими крышками с боков. Определить объем цистерны, если диаметр цистерны равен 9м, толщина крышки – 0,4м, длина цистерны – 8,92м.

21) Куча щебня имеет форму конуса, радиус основания которого 10м, а образующая 70м. Сколько ходок должен сделать водитель, чтобы перевезти 10 таких куч щебня, если за одну ходку он перевозит 25тонн? Плотность щебня 1300кг/м3.

22) Чему равен суммарный рабочий объем в дм3 10 цилиндров двигателя ЯМЗ – 740 (КамАЗ), если диаметр одного цилиндра 120мм, ход поршня 120мм?

23) Найти объем камеры сгорания двигателя автомобиля ЗИЛ – 130, если диаметр поршня 100мм, ход поршня150мм (без учета головки блока).

24) Определить емкость масляного бака насоса гидроусилителя автомобиля ЗИЛ – 130, если его диаметр 126мм, высота 140мм.

25) Как увеличится объем камеры сгорания двигателя автомобиля ГАЗ – 53, если диаметр поршня 10см, а ход поршня 9см?

26) Вычислите объем горючего, необходимого для работы четырехцилиндрового двигателя, если диаметр цилиндра 110мм, а ход поршня 125мм.

Практическое занятие № 8.3 (1)

По теме: Понятие об определенном интеграле как площади криволинейной трапеции

Изобразить криволинейную трапецию, ограниченную:

1) графиком функции $y = (x-1)^2$, осью Ox и прямой $x = 2$;
2) графиком функции $y = 2x - x^2$ и осью Ox;
3) графиком функции $y = \frac{2}{x}$, осью Ox и прямыми $x = 1$, $x = 4$;
4) графиком функции $y = \sqrt{x}$, осью Ox и прямой $x = 4$.

Найти площадь фигуры, ограниченной осью Ox и параболой:

1) $y = 4 - x^2$;
2) $y = 1 - x^2$;
3) $y = -x^2 + 4x - 3$.

Примечание:

1. На выполнение работы отводится 40 – 45 минут
2. За верно выполненные 4 заданий ставится оценка «удовлетворительно», за (5 – 6) оценка «хорошо», за 7 оценка «отлично»

Практическое занятие № 8.3 (2)

По теме: Понятие об определенном интеграле как площади криволинейной трапеции

Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной прямыми $x = a,\ \ x = b,$ осью Ox и графиком функции $y = f(x)$:

1) $a = 2,\ \ b = 4,\ \ f(x) = x^3;$
2) $a = 3,\ \ b = 4,\ \ f(x) = x^2;$
3) $a = -2,\ \ b = 1,\ \ f(x) = x^2 + 1;$
4) $a = 0,\ \ b = 2,\ \ f(x) = x^3 + 1;$
5) $a = \frac{\pi}{3},\ \ b = \frac{2\pi}{3},\ \ f(x) = \sin x;$
6) $a = -\frac{\pi}{6},\ \ b = 0,\ \ f(x) = \cos x.$

Примечание:

1. На выполнение работы отводится 40 – 45 минут
2. За верно выполненные (3 – 4) заданий ставится оценка «удовлетворительно», за 5 оценка «хорошо», за 6 оценка «отлично»

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 8.4пм

Тема: «Определенный интеграл в жизни» (2 часа)

Цель работы: показать применение знаний по математике, необходимых для лучшего усвоения материала профессионально- технического цикла, для практической деятельности будущих специалистов.

Содержание работы.

1.Теоретический материал

Пусть надо вычислить **площадь** какой-либо плоской фигуры.

S = $\int\limits_{[?][?]}^{b} f(x)$ - $\int\limits_{[?][?]}^{b} g(x).$

Масса произвольного тела является величиной, для вычисления которой нужно тоже понятие интеграла. Для вычисления массы неоднородного стержня, т.е. с различной плотностью, получаем формулу (стержень расположен вдоль оси х так, что занимает положение [0, l])

.

Предположим, что точка движется по прямой (по оси x) с известной скоростью.

S = $\int_{t1}^{t2} v(t)$

q = $\int_{a}^{b} I(t)$

Работа определяется по формулам

A = $\int_{t1}^{t2} N(t)$, **A** = $\int_{x1}^{x2} F(x)$. $N(t)$ - мощность, $F(x)$ – сила

2. Выполните задания

№ 1. Сжатие x пружины амортизатора пропорционально приложенной силе F, т.е. F= kx . Вычислить работу силы F при сжатии пружины на 0,04м, если для сжатия пружины на 0,01м нужна сила 10 Н.

№2. Производительность труда рабочего по изготовлению деталей для автомобиля в течение смены приблизительно выражается формулой y = -0,0033x^2 – 0,089x +20,96, где x - время в часах. Вычислите объем выпуска деталей в течение года, если количество рабочих дней равно 240.

№3. Расход топлива Q (в литрах) автомобиля ЗИЛ -130 в зависимости от скорости движения определяется формулой Q = 18 -0,3v + 0,003v^2, $30 \le v \le 100$. Определите средний расход топлива при скорости движения автомобиля от 60 до 70 км/ч.

№4. Поступление легковых автомобилей в автоцентры г. Курска выражается функцией y_1 = 75 -0,8x +0,006x^2, а реализация - y_2 = 56 -0,4x +0,003x^2, где x – количество дней. Определите запас автомобилей по истечении двух месяцев.

№5. Потребность в электроэнергии автомастерской**,** которая работает круглосуточно, приблизительно выражается формулой **y** = 300 – 16x +0,2x^2, где x – число дней. Вычислите стоимость электроэнергии, расходуемой автомастерской в течение месяца, если стоимость 1 кВт равна 2,72рубля (в месяце 25 рабочих дней)

Контрольные вопросы (ответить письменно)
1. Запишите свойства интеграла.
2. Запишите формулу Ньютона – Лейбница.
3. В чем состоит геометрический смысл интеграла?

I вариант	**II вариант**
1. *Вычислить определенный интеграл*:	
1) $\int_{-1}^{0} \frac{(x^2-2x)(3-2x)}{x-2}dx$; 2) $\int_{1}^{2} \frac{x^2-3x-10}{x+2}dx$;	3) $\int_{2}^{3} \frac{(x^2-3x+2)(2+x)}{x-1}dx$; 4) $\int_{0}^{1} \frac{x^2-4x}{x-2}dx$.
2. *Решить неравенство*:	

1) $\int_{-\frac{2}{3}}^{1} x^3 dx$; 2) $\int_{1}^{3} \frac{dx}{x^2}$; 3) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x dx$; 4) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}$; 5) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x dx$; 6) $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \frac{5}{\sin^2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)} dx$;	7) $\int_{-1}^{\frac{\pi}{2}} x^4 dx$; 8) $\int_{4}^{9} \frac{dx}{\sqrt{x}}$; 9) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$; 10) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^2 x}$; 11) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2\sin\frac{x}{3} dx$; 12) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{7}{\cos^2 3x} dx$.

Практическое занятие № 9.4 (1)

По теме: Решение иррациональных уравнений и неравенств

Решите уравнение:

1) $\sqrt{x} = 4$
2) $\sqrt{x} + 16 = 0$
3) $x - \sqrt{x} - 6 = 0$
4) $\sqrt{x^2 + x - 2} = 2$
5) $\sqrt{7x + 1} = 2\sqrt{x + 4}$
6) $\sqrt{2x + 3} = x$
7) $\sqrt{-4x^2 - 16} = 2$
8) $\sqrt{2x} + \sqrt{x - 3} = -1$
9) $\sqrt{1 - 2x} - \sqrt{13 - x} = \sqrt{x + 4}$
10) $\sqrt{5 + \sqrt{x - 1}} = 3$

Примечание:

5. На выполнение работы отводится 40 – 45 минут
6. За верно выполненные (5 – 6) заданий ставится оценка «удовлетворительно», за (7 – 8) оценка «хорошо», за (9 – 10) оценка «отлично»

Практическое занятие № 9.4 (2)

По теме: Решение иррациональных уравнений и неравенств

Решите неравенство:

1) $\sqrt{5x+11} > x+3$
2) $\sqrt{x} \geq x$
3) $\sqrt{x} \cdot (x-1) < 0$
4) $\sqrt{x+5} < 2$
5) $\sqrt{x-1} < \sqrt{5-x}$
6) $x\sqrt{x-3} \geq 0$
7) $\sqrt{2-x} < 3$
8) $\sqrt{x^2-5x+6} \cdot (x^2-2x-1) = 0$
9) $\sqrt{2x-x^2+1} \geq 2x-3$
10) $\sqrt{2x^2+x} < 1+2x$

Примечание:

1. На выполнение работы отводится 40 – 45 минут
2. За верно выполненные (5 – 6) заданий ставится оценка «удовлетворительно», за (7 – 8) оценка «хорошо», за (9 – 10) оценка «отлично»

Практическое занятие № 10.2 (1)

По теме: Решение показательных уравнений и неравенств

Решить уравнения:

1) $4^{x-1} = 1$
2) $27^x = \frac{1}{3}$
3) $3 \cdot 9^x = 81$
4) $0{,}6^x \cdot 0{,}6^3 = \frac{0{,}6^{2x}}{0{,}6^5}$
5) $3^{2x-1} + 3^{2x} = 108$
6) $5^x = 8^x$

7) $9^x - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$

Примечание:

5. На выполнение работы отводится 40 – 45 минут
6. За верно выполненные 4 задания ставится оценка «удовлетворительно», за (5 – 6) оценка «хорошо», за 7 оценка «отлично»

Практическое занятие № 10.2 (2)

По теме: Решение показательных уравнений и неравенств

Решите уравнение:

1) $4^x = 64$
2) $3^x = \frac{1}{9}$
3) $25^{-x} = \frac{1}{5}$
4) $(0{,}5)^x = \frac{1}{64}$
5) $\sqrt[3]{128} = 4^{2x}$
6) $10^{x^2+x-2} = 1$
7) $3^{x^2-4x-0{,}5} = 81\sqrt{3}$
8) $\left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{9}{8}\right)^x = \frac{27}{64}$
9) $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x-7} = \left(\frac{7}{3}\right)^{7x-3}$
10) $(0{,}4)^{x-1} = (6{,}25)^{6x-5}$

Примечание:

1. На выполнение работы отводится 40 – 45 минут
2. За верно выполненные (5 – 6) заданий ставится оценка «удовлетворительно», за (7 – 8) оценка «хорошо», за (9 – 10) оценка «отлично»

Практическое занятие № 10.2 (3)

По теме: Решение показательных уравнений и неравенств

Решить неравенство:

1) $6^x > 36$
2) $2^{4x} < 16$
3) $3^{\frac{x-5}{2}} \geq 3\sqrt{3}$
4) $\left(\frac{5}{2}\right)^{2x-3} < 15\frac{5}{8}$

5) $27 > \left(\frac{1}{3}\right)^{6-x}$

6) $7^{3x} \leq 343$

7) $\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2+5x} > 1$

8) $(0{,}2)^{(2x-3)\cdot(x-2)} > 5$

9) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2x-2} < 8$

10) $2^{x+2} \cdot 5^{x+2} \geq 2^{3x} \cdot 5^{3x}$

Примечание:

1. На выполнение работы отводится 40 – 45 минут
2. За верно выполненные (5 – 6) заданий ставится оценка «удовлетворительно», за (7 – 8) оценка «хорошо», за (9 – 10) оценка «отлично»

Практическое занятие № 10.2 (4)

По теме: Решение показательных уравнений и неравенств

Решить систему уравнений:

1) $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 5^{x+y} = 28 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x - y = 2 \\ 3^{x^2+y} = \frac{1}{9} \end{cases}$

3) $\begin{cases} 4^x \cdot 2^y = 32 \\ 3^{8x+1} = 3^{3y} \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2^x + 2^y = 6 \\ 2^x - 2^y = 2 \end{cases}$

5) $\begin{cases} 5^x - 5^y = 100 \\ 5^{x-1} + 5^{y-1} = 30 \end{cases}$

Примечания:

1. На выполнение работы отводится 40 – 45 минут
2. За верно выполненные 3 задания ставится оценка «удовлетворительно», за 4 оценка «хорошо», за 5 оценка «отлично»

Практическое занятие № 10.2 (5)

По теме: Решение показательных уравнений и неравенств

Решить уравнения:

1) $128 \cdot 16^{2x+1} = 8^{3-2x}$

2) $2^{x} = 7$

3) $5^{x+1} \cdot 2^{x} = 50$

4) $\frac{2^{2x^2-6x}}{12^{3-x}} = \frac{12^{1-2x}}{3^{x^2-3x}}$

5) $32^{x+3} \cdot 3^{3x+1} \cdot 625^{x+2} = 600^{x+7}$

6) $2^{7-5x} - \left(\frac{1}{8}\right)^{2x+1} = 0$

7) $36 \cdot 216^{3x+1} = 1$

Примечание:

7. На выполнение работы отводится 40 – 45 минут
8. За верно выполненные 4 задания ставится оценка «удовлетворительно», за (5 – 6) оценка «хорошо», за 7 оценка «отлично»

Практическое занятие № 11.2 (1)

По теме: Свойства логарифмов. Операция логарифмирования

Вычислить:

1) $\log_{12} 244$
2) $\log_{\frac{1}{4}} 16$
3) $\log_{13} 1$
4) $\left(\frac{1}{6}\right)^{-\log_6 4}$
5) $2^{4-\log_2 5}$
6) $\log_{\frac{1}{4}}(\log_3 4 \cdot \log_2 3)$
7) $4\log_{\frac{1}{2}} 3 - \frac{2}{3}\log_{\frac{1}{2}} 27 - 2\log_{\frac{1}{2}} 6$
8) $\log_2 \log_2 \log_2 2^{16}$
9) Вычислить $\log_a x$, если $\log_a b = 3$, $\log_a c = -2$, $x = a^3 b^2 \sqrt{c}$
10) $\frac{\log_5 8}{\log_5 16}$
11) $\frac{\log_7 8}{\log_7 15 - \log_7 30}$
12) $\log_{11} \sqrt[5]{121}$

Примечания:

5. На выполнение работы отводится 40 – 45 минут
6. За верно выполненные (6 – 8) заданий ставится оценка «удовлетворительно», за (9 – 10) оценка «хорошо», за (11 – 12) оценка «отлично»

Практическое занятие № 11.2 (2)

По теме: Свойства логарифмов. Операция логарифмирования

Вычислить:

$4^{\log_4 7}$

$25^{\log_5 3}$

$9^{\log_9 2+\log_5\frac{1}{25}}$

$\log_{36} 2-\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{6}} 3$

$\log_2 \sqrt[4]{2}$

$\log_2 \log_3 81$

$0{,}5^{6\log_{0,5} 2}$

$0{,}125^{\log_{0,5} 1}$

$\frac{\log_7 14-\log_7 56}{\log_6 30-\frac{1}{2}\log_6 150}$

$\left(81^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\log_9 4}+25^{\log_{125} 8}\right)\cdot 49^{\log_7 2}$

$\sqrt{{}^{\log_6}\sqrt[5]{25}+{}^{\log_8}\sqrt[7]{49}}$

$\log_{\sqrt{5}}\frac{1}{25\cdot\sqrt[4]{5}}$

Примечания:

1. На выполнение работы отводится 40 – 45 минут
2. За верно выполненные (6 – 8) заданий ставится оценка «удовлетворительно», за (9 – 10) оценка «хорошо», за (11 – 12) оценка «отлично»

Практическое занятие № 11.4 (1)

По теме: Решение логарифмических уравнений и неравенств

Решить уравнения:

1) $\log_2(x-5)+\log_2(x+2)=3$
2) $lg(x-1)+lg(x+1)=0$
3) $lg(x-1)-lg(2x-11)=lg2$
4) $\log_3(5x+3)=\log_3(7x+5)$
5) $\log_7(x-1)\cdot\log_7 x=\log_7 x$
6) $\log_2(3x+1)\cdot\log_3 x=2\log_2(3x+1)$
7) $\log_4 x^2=3$
8) $lgx+lgx^2=lg(9x)$

Примечание:

1. На выполнение работы отводится 40 – 45 минут
2. За верно выполненные (4 – 5) заданий ставится оценка «удовлетворительно», за (6 – 7) оценка «хорошо», за 8 оценка «отлично»

Практическое занятие № 11.4 (2)

По теме: Решение логарифмических уравнений и неравенств

Решить уравнения:

9) $\log_3(3x-5)=\log_3(2x-3)$

10) $\log_{\frac{1}{2}}(6x-4)=-3$

11) $3lg2+lg(x+8)=lg48-lg2$

12) $\log_2(x+6)=2$

13) $\log_2\sqrt[7]{8}=x$

14) $x=\log_5 125$

15) $\log_{0,04} 5=x$

16) $\log_2\left(x+\frac{1}{4}\right)=-1$

Примечание:

7. На выполнение работы отводится 40 – 45 минут
8. За верно выполненные (4 – 5) заданий ставится оценка «удовлетворительно», за (6 – 7) оценка «хорошо», за 8 оценка «отлично»

Практическое занятие № 11.4 (3)

По теме: Решение логарифмических уравнений и неравенств

Решить неравенство:

1) $\log_2\left(x+\frac{1}{4}\right)=-1$
2) $lg40-lg2=lg(10-2x)$
3) $\log_5 x=-2$
4) $lg(9x+10)=2$
5) $\log_7(2x+1)=2$

6) $\log_3\left(8\frac{24}{25}+x\right)=2$

7) $\log_5(2x-1)=1$

Примечание:

1. На выполнение работы отводится 40 – 45 минут
2. За верно выполненные 4 задания ставится оценка «удовлетворительно», за (5 – 6) оценка «хорошо», за 7 оценка «отлично»

Практическое занятие № 11.4 (4)

По теме: Решение логарифмических уравнений и неравенств

Решить неравенство:

3. $\log_3(x+2)<3$
4. $\log_8(4-2x)\geq 2$
5. $\log_{\frac{1}{5}}(4-3x)\geq -1$
6. $lgx>lg8+1$
7. $\log_{\frac{1}{5}}(3x-5)>\log_{\frac{1}{5}}(x+1)$
8. $\log_{15}(x-3)+\log_{15}(x-5)<1$
9. $\log_5\frac{3x-2}{x^2+1}>0$

Примечание:

1. На выполнение работы отводится 40 – 45 минут
2. За верно выполненные 4 задания ставится оценка «удовлетворительно», за (5 – 6) оценка «хорошо», за 7 оценка «отлично»

Практическое занятие № 11.4 (5)

По теме: Решение логарифмических уравнений и неравенств

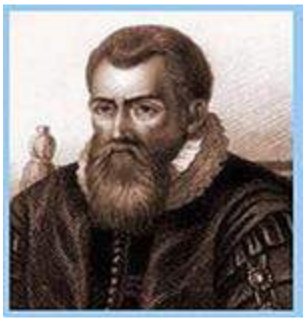
Решить неравенство:

10. $\log_2(x+1)<3$
11. $\log_4(4-2x)\geq 2$
12. $\log_{\frac{1}{6}}(3-3x)\geq -1$
13. $lgx>lg6+1$
14. $\log_{\frac{1}{5}}(2x-4)>\log_{\frac{1}{5}}(x+2)$
15. $\log_{15}(x-3)+\log_{15}(x-5)<1$
16. $\log_5\frac{3x-2}{x^2+1}>0$

Примечание:

1. На выполнение работы отводится 40 – 45 минут
2. За верно выполненные 4 задания ставится оценка «удовлетворительно», за (5 – 6) оценка «хорошо», за 7 оценка «отлично»

Практическая работа 11.5пм: Логарифмы в природе и технике (2 часа)
.
Цель: практическое применение логарифмов в жизни человека, убедиться в их значимости в жизни человека.
.
1. История логарифма
Во все времена человечество пыталось вычисления упростить, составлялись таблицы, формулы для приближённых вычислений, которые заменили бы сложные операции вычислений на более простые вычисления. Потребность в новом способе счёта возникла в 16 веке, так как в это время развивается астрономия, торговля.
В это время, в эпоху Возрождения усиленно развивается судоходство, крупнейшие европейские державы стремятся к владычеству на море, происходят мореплавания на большие расстояния. Обработка полученных данных требовала колоссальных расчетов, и, следовательно, стали необходимы новые средства упрощения вычислений. Такими средствами в 15 - 16 веках явились в первую очередь логарифмы и десятичные дроби. Логарифмы также были созданы в 16 веке как средство для упрощения вычислений. В их основе лежит очень простая идея, знакомство с которой приписывается еще Архимеду.
Ученые приходят к выводу, что если заменить умножение и деление на сложение и вычитание, то сложности астрономических вычислений сократятся. Была сопоставлена геометрическая прогрессия с арифметической, при том, что геометрическая – исходная.
При этом упрощалось не только умножение и деление, но и извлечение корня п-ой степени, преобразуется в деление логарифма подкоренного выражения на степень п.
Вся эта теория принадлежит Михаэлю Штифелю. Так считают, потому что он был первым, кто опубликовал ее в своей книге.
В 1614 году выходит книга шотландца Джона Непера на латинском языке опубликованная в Эдинбурге, сочинение под названием « Описание удивительной таблицы логарифмов». В этой книге он даёт краткое описание логарифмов и их свойств, а также 8-значные таблицы логарифмов синусов, косинусов и тангенсов, с шагом 1.
Сочинение « Описание удивительной таблицы логарифмов» было разделено на 2 книги, из которых первая книга посвящена логарифмам, а вторая книга тригонометрии.
В то время все значения таблицы Непера содержали вычислительную ошибку после шестого знака. Но и это не помешало новой методике вычислений получить широчайшую популярность. Многие европейские математики, включая Кеплера, стали составлять логарифмические таблицы.
В это время математик – Бригг, который восхищался Непером, за то, что тот открыл такую гениальную вещь как логарифм. Бриг поехал в Шотландию, чтобы увидеть изобретения и сделал открытие десятичных логарифмов.
Так логарифмы стали применяться практически во всех сферах жизни. Там, где нужно было проводить вычисление над многозначными числами или где была необходима точность до 5-ого знака после запятой стали применять логарифмы. На практике более точные результаты не используются. Учёные убедились, что логарифмы уникальны, способны описать практически любое физическое явление.
Первые десятичные логарифмы появились в 1615 году и были напечатаны первые логарифмические таблицы.
Непер тогда предложил взять за логарифм единицы нуль, а за логарифм десяти - 100, или, что сводится к тому же, просто 1.
Непер не смог усовершенствовать свои таблицы из-за болезни, однако дал Бригсу (1561-1631) рекомендации видоизменить определение логарифма, приблизив его к современному. Бригс опубликовал свои таблицы в год смерти Непера (1617). Рисунок 1.



После появления логарифмов Непера, через несколько лет в 1620 г Эдмунд Уингейт и Уильям Отред изобрели незаменимый счётный прибор – логарифмическую линейку. Умножение и деление чисел на логарифмической линейке заменяется соответственно сложением и вычитанием их логарифмов. Учёные, инженеры, астрономы с помощью логарифмической линейки смогли быстро получать ответ в три значащие цифры с достаточной точностью. Рисунок 2.

Рисунок 2.

Логарифмические линейки использовались до начала 1980-х годов.

Первая логарифмическая линейка была незаменима до появления первых карманных калькуляторов.

И хотя теперь её вытеснили из обихода микрокалькуляторы, можно с уверенностью сказать, что без логарифмической линейки не были бы созданы первые компьютеры, калькуляторы.

Знаки log и Lg были введены в 1624 году И. Кеплером.

Термин «натуральный логарифм» ввели Менголи в 1659 г. и вслед за ним Н. Меркатор в 1668 г., лондонский учитель Джон Спейдел. издал таблицы натуральных логарифмов чисел от 1 до 1000 под названием «Новые логарифмы».

В 1703 году издаются первые логарифмические таблицы на русском языке.

С открытием логарифмического ряда изменилась техника вычисления логарифмов: они стали определяться с помощью бесконечных рядов.

Однако и в XX I веке логарифмическая линейка нашла своё применение в наручных часах, т.е. получила своё второе рождение.

Рисунок 3.

Спрос людей, следящих за модой и желающих приобрести хронометры со встроенным вычислительным устройством увеличивалось, и производители выпустили новую модель часов круглой формы с встроенной логарифмической линейкой.

Такие устройства производители назвали «навигационная линейка». В чём их достоинство, они дают возможность получать информацию, например, рассчитать таблицу расхода топлива на пройденное расстояние, посчитать пульс, определить скорость электропоезда, которая равна соответствующей табличной форме.

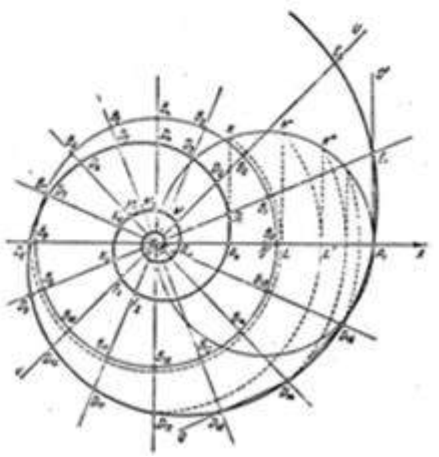
2. Логарифмическая спираль.

Почему логарифмическая спираль является примером логарифмической зависимости в природе и не только? Попробую ответить на этот интересующий нас вопрос. Во-первых, логарифмы и сегодня позволяют упрощать вычисления.

Во-вторых, всегда, во все времена цель математической науки, остаётся одной, помочь людям узнать больше об окружающем мире, познать его тайны и закономерности.

Многие явления природы помогает описать логарифмическая зависимость, т.е. логарифмическая функция. Математики, пытаясь составить математическую модель того или иного явления, стали часто обращаться к логарифмической функции. Ярким примером этого обращения является логарифмическая спираль.

Рисунок 4.



Логарифмическая спираль – плоские линии в геометрии, которые отличаются от прямых и окружностей и скользят сами по себе.

Эта логарифмическая спираль закручивается вокруг полюса, стремится к нему, но не достигает, а в другую сторону до бесконечности развёртывается.

Логарифмическая спираль явилась ярким примером логарифмической зависимости в природе, а почему? Постараюсь найти объяснение этому.

По правилам природы, все живые существа растут во всех направлениях, сохраняя общие начертания своей формы. Взрослое существо всегда выше и толще детёныша. Однако раковины морских животных растут лишь в одном направлении. Рисунок 5.

И чтобы не вытягиваться в длину, им приходится скручиваться, причем рост совершается так, что сохраняется подобие первоначальной формы раковины.
А такой рост может совершаться лишь по логарифмической спирали или ее некоторым пространственным аналогам. Поэтому раковины многих моллюсков, улиток, а также рога горных козлов закручены по логарифмической спирали.

Рисунок 6.

Логарифмическая спираль является математическим символом соотношения формы и роста. Немецкий поэт Иоганн-Вольфганг Гете считал эту спираль математическим символом духовного развития и жизни.
По логарифмической спирали очерчены не только раковины. По логарифмическим спиралям закручивает нити вокруг центра один из распространенных пауков, Эпейра, таким образом, сплетая паутину.
Рисунок 7.

Семечки в подсолнухе располагаются по линиям, напоминающим логарифмическую спираль.
Рисунок 8.

По логарифмическим спиралям закручены и многие галактики, в частности Галактика, которой принадлежит Солнечная система.

«Одновременно с этим я углубил свои исследования по морфологии подсолнуха – по вопросу, по которому в свое время сделал чрезвычайно интересные выводы еще Леонардо да Винчи. Никогда еще в природе не существовало столь совершенного примера логарифмических спиралей…»
Вот некоторые удивительные свойства логарифмической спирали:
1.При преобразовании подобия логарифмическая спираль остается неизменной. Это свойство так удивило изучавшего ее Якоба Бернулли (XVII в.), что он придал им мистический смысл.
2. Логарифмическая спираль пересекает свои радиус-векторы под постоянным углом, поэтому её называют равноугольной.
3.Третье свойство. Свойство логарифмической спирали пересекать все свои радиус-векторы под одним углом, даёт возможность её применения в технике.
В технике часто применяются вращающиеся ножи. Сила давления ножей на разрезаемый ими материал, зависит от направления скорости вращения и угла между лезвием ножа. Чтобы давление удержать постоянным, нужно сохранить постоянное значение угла резания, а это возможно, если лезвия ножей имеют форму дуги логарифмической спирали.
Рисунок 10.

Величина угла резания зависит от материала, из которого изготовлен нож. По логарифмической спирали изгибают трубу, которая приводит поток воды к лопастям турбины. Благодаря форме логарифмической спирали, потери энергии на изменение течения воды в трубе становятся, минимальными, а напор воды становится, максимальным.

Рисунок 11.

3 Логарифмы в сельском хозяйстве.

Поскольку мы живём в сельской местности, захотелось узнать, где применяются логарифмы в сельском хозяйстве, есть формула $m = m_0 \cdot e^{kt}$, по которой происходит рост животных, и можно узнать относительную скорость роста, где m -масса животного в полмесяца, m_0 – масса при рождении, e - экспонента, k - коэффициент относительной скорости роста, t –период времени. Рисунок 12.

Приведу пример своего расчёта, используя данную формулу.

Новорожденный бычок имел массу 27,2 кг, через полмесяца он подрос, набрал массу уже до 41кг. Узнаю, какой масса будет в возрасте одного месяца. Нахожу относительную скорость роста, используем формулу: $m = m_0 \cdot e^{kt}$; $41= 27{,}2\, e^{k\, 0{,}5}$;

$\lg 41= \lg 27{,}2 + 0{,}5\, k \cdot \lg e$, $1{,}6128 =1{,}4346 +0{,}5\, k \cdot 0{,}4343$; $k =0{,}821$ теперь легко определить массу в возрасте одного месяца:

$m =27{,}2\cdot e^{0{,}821}$; $\lg m = \lg 27{,}2+0{,}821 \lg e =1{,}4346 + 0{,}821\cdot 0{,}4343 =1{,}7912$; $m =58{,}4$ (кг.)

Что объединяет шум и звёзды?

Я узнал, что громкость шума и яркость звёзд оцениваются по логарифмической шкале. Применение логарифмических шкал рекомендовано особенностями наших органов чувств: зрения, слуха и т.д. Рисунок 13.

Со времен древнегреческого астронома Гиппарха (II в. до н.э.) используется понятие «звездная величина». В те времена считали, что расстояния до звёзд одинаковы и что чем она ярче, тем звезда больше.
Астрономы разделили звёзды на светила первой величины 1 Т , а величины едва различимые глазом к шестой 6 Т в зависимости от степени видимой яркости.
Блеск звезды 1 Т в 100раз больше звезды в 6 Т , а это означает, что разность в 5 звёздных величин ровно в 100 раз соответствует различию в блеске.
«Величина» звезды является не что иное, как логарифм ее физической яркости.
Работая над оцениванием яркости звёзд, астрономы пользуются таблицами логарифмов по основанию 2,5. Как происходит оценивание громкости шума?
Единицей громкости служит «бел», практически – его десятая доля, «децибел».
Для слуха человека степени громкости 10 децибел, 20 децибел и т.д. составляют геометрическую прогрессию.
Однако объективная (физическая) сила шумов является геометрической прогрессией со знаменателем 10.
Громкость шума, выраженная в белах, равна десятичному логарифму его физической силы.
Рассмотрим несколько примеров.
Тихий шелест листьев деревьев оценивается в 1 бел, громкая разговорная речь - в 6,5 бела, рычанье зверя - в 8,6 бела. Получаем, что сила звука разговорной речи громче шелеста листьев деревьев.
106,5-1 = 105,5 = 316000 раз; рычанье зверя сильнее громкой разговорной речи в 108,6-6,5 = 102,1 = 158 раз.
Вредным для человеческого организма считается шум громкостью больше 8 беля узнал, что логарифмы вторгаются и в область психологии.
Децибелы, измеряющие громкость звука, которые воздействуют на наши уши, пропорциональны логарифму мощности звука. Человеческий мозг в отличие от мощности звука воспринимает раздражения от органов чувств: зрения, слуха и т.д. пропорционально её логарифму, а не пропорционально силе раздражителя. Поэтому наши уши способны услышать шорох листьев деревьев и не оглохнуть от громкого звука. Глаза могут заметить, как сверкает снег на свету и не ослепнуть, смотря на солнце, которое ярче в миллиарды раз.
Логарифмы находят самое широкое применение и при обработке результатов тестирований в психологии и социологии.
Воспринимаемые органами чувств человека ощущения, могут отличаться во много миллионов, даже миллиардов раз друг от друга раздражениями. Удары молота о металлическую трубу в сто раз громче, чем тихий шелест листьев деревьев, а яркость вольтовой дуги в триллионы раз превышает яркость какой-нибудь звезды, едва видимой на ночном небе. Опыты показали, что

организм человека как бы «логарифмирует» полученные раздражения, то есть величина ощущения приблизительно пропорциональна десятичному логарифму величины раздражения. Поэтому учёные выработали приём точной числовой оценки громкости шума, которую необходимо соблюдать во избежание вредного влияния промышленных шумов на здоровье рабочих и на производительность труда. Отсюда делаем вывод, что логарифмы и логарифмическая функция помогают человеку объяснить многие тайны природы человеческих ощущений.

Логарифмы в музыке.

Теперь рассмотрим еще один интереснейший пример о связи логарифмов и музыки.

Рисунок 15.

Математикой музыканты редко увлекаются, но тем ни менее даже не подозревая, они с математикой встречаются и очень часто и притом с такими «странными» понятиями как логарифмы. Определённые закономерности являются основой музыкальной гаммы. Для создания гаммы удобно пользоваться логарифмами соответствующих частот: log 2w0, log 2w1.

lg N_{pm} = , N_{pm} – номер клавиши, m - номер октавы, p - номер звука в октаве делённый на 12.

Оказывается, нажимая на клавиши рояля, можно сказать, что музыкант играет на логарифмах. Действительно, так называемые «ступени» темперированной хроматической гаммы не расставлены на равных расстояниях ни по отношению к числам колебаний, ни по отношению к длинам волн соответствующих звуков, а представляют собой логарифмы этих величин. И основание этих логарифмов равно 2.

Номер клавишей есть логарифм числа колебаний соответствующих им звуков умноженные на 12.

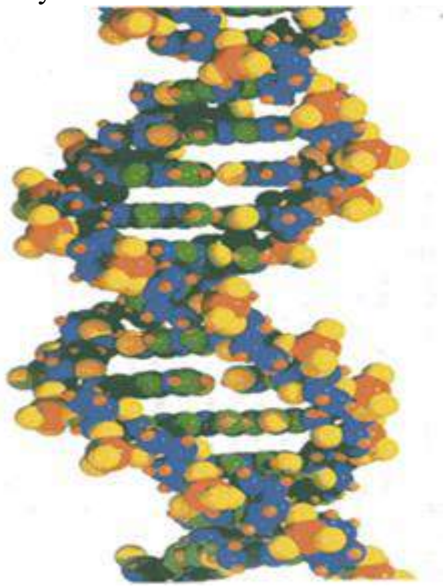
Можно сказать, что номер октавы представляет, целую часть (характеристику) логарифма числа колебаний этого тона, а номер звука в данной октаве, деленный на 12 – дробную часть (мантиссу) этого логарифма.

Звездные галактики. Галактики, штормы и ураганы – впечатляющее применение логарифмов. Галактика закручена по логарифмической спирали, и ей принадлежит солнечная система.

Рисунок 16.

В 1845 году английский астроном Уильям Парсонс с помощью с помощью телескопа открыл класс туманностей в виде логарифмической спирали. Яркий пример тому является туманность в созвездии Гончих Псов. В первой половине XX столетия было установлено, что спиральные туманности – это звёздные системы, которые стали называть галактиками.
Чтобы описать с помощью логарифмов свойства спиральных галактик астрономам пришлось приложить много усилий. Галактики состоят из скоплений газа и горячих звёзд. И когда они вращаются, то распределяются вдоль ветвей логарифмической спирали.
В спиральных ветвях происходит повышение плотности, как звезд, так и межзвездного вещества – пыли и газа. У центра галактики ветви вращаются быстрее, повышенная плотность газа ускоряет образование и последующее сжатие газовых облаков и тем самым способствует рождению новых звезд. Поэтому спиральные ветви являются местом интенсивного звездообразования.
Молекула ДНК для каждой клетки нашего организма является ядром. Она представляет собой спираль, которая содержит генетический код жизни.

Рисунок 17.



Молекулы ДНК, с точки зрения молекулярной теории, имеют огромную длину, которая состоит из двух нитей сплетённых в двойную спираль между собой. Эти нити сравниваются с нитями бус. Белки, которые также сравниваются с нитями бус, их «бусины» являются аминокислотами 20 различных типов.
У ДНК-всего 4 типа «бусин» и зовутся они нуклеотидами. «Бусины» двух нитей двойной спирали ДНК связаны между собой и строго соответствуют друг другу. Мы часто встречаем изготовление предметов по шаблону, называемому матрицей. Отливка монет или медалей,

типографского шрифта. По аналогии происходящее в живой клетке восстановление двойной спирали по одной её цепи, как по матрице, так же называют матричным синтезом.

4 Применение логарифмов в различных сферах жизнедеятельности человека.

Математика вторгается в нашу современную жизнь с ее особым стилем мышления, становящимся сейчас обязательным и для инженера, и для биолога. Логарифмическая функция нашла применение и в биологии.

Рисунок 18.

Логарифмы используются в биологии для описания явлений биологами. Процессы размножения микроорганизмов, рост колоний бактерий, радиоактивный распад элементов, изменение скоростей химических реакций и т.п.

Например, бактерия кишечной палочки в питательной среде каждую минуту делится.

Следовательно, общее количество бактерий каждую минуту становится в два раза больше.

То есть в начале процесса была одна бактерия, то через x минут их число N станет 2x, т.е. N (x) = 2x.

Пример. В начале процесса было 6 бактерий, через 2ч , после того как их поместили в питательную среду их число стало 100.

Через сколько времени сначала помещения бактерий в питательную среду возможно получить колонию 500 бактерий?

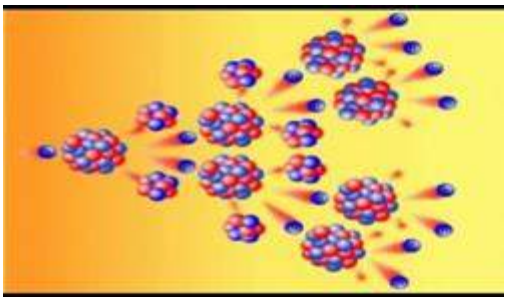
x=6, t =2, p = , в = 500. То есть требуемое время равно значению выражения 2· = ≈ 3,28, т.е. примерно через 3ч. 20мин.

Логарифмы нашли своё применение при расчёте звукоизоляции стен. Формула D = A · Lg , где p – давление звука прошедшего через стену, p_0 – давление звука до поглощения, A - константа, которая равна 20 децибелам, позволяет определить коэффициент звукоизоляции стен. Например, если D - коэффициент звукоизоляции равен 20 децибел, тогда Lg =1, отсюда p_0 =10 p , а это означает, что стена снижает звук в 10 раз. Такая изоляция у деревянной двери.

Рисунок 19.

Радиоактивный распад. Формула m = m_0 · e ,где m_0 начальная масса вещества в период времени t =0, m – масса вещества в момент времени t , помогает проследить, как изменяется масса радиоактивного вещества., T - период полураспада. Через время T масса радиоактивного вещества уменьшится в 2 раза после начального момента времени.

Рисунок 20.



Формула Циолковского было важным достижением в истории того времени, т.к. открыла новую эпоху в области космонавтики.
Формула давала возможность рассчитывать характеристическую скорость летательного аппарата под действием тяги двигателя без воздействия сил со стороны.
$V = V_{r\cdot} \cdot \mathrm{Ln}\, V_{r\cdot}$ - означает скорость вылетающих газов, m_0 – стартовая масса ракеты.
Формула позволяет связать скорость ракеты V с её массой m . При сгорании топлива V_r скорость истечения газа невелика. Логарифм растёт медленно, поэтому почти всю стартовую массу нужно отдать под топливо, чтобы отношение сделать большим и чтобы оно достигло космической скорости.
Рисунок 21.

Существует формула сложных процентов, которая нашла применение в банковском деле.

$S_n = S_0 (1 + \frac{p}{100})$ n.
Рисунок 22.

Например, вы положили в банк некоторую сумму денег. За то что деньги лежат в банке и банк ими пользуется, он за это начисляет p % годовых. И если деньги вы не снимаете, то положенная вами сумма S увеличивается за год и станет S_1, где $S_1 = S_0 (1 + \frac{p}{100})$.
S_0 - начальная сумма, S_1 - конечная сумма,

$\frac{p}{100}$- процентная ставка

В конце n –ого года сумма вклада станет равной S_n , которую посчитаем по формуле сложных процентов.

$S_n = S_0 (1 + \frac{p}{100})$ n , тогда n = log·( )

Например. Сколько потребуется лет, чтобы 100000 руб. выросли до 1000000 руб. при процентной ставке 20%, если деньги не снимали.

n = log · ( ), считаем: n = $\log_{(1+20/100)}$ (1000000/100000) = 8.9 лет

Важно знать, что при процентной ставке больше, чем в 2,7 раза вклад, положенный под 100% годовых не увеличивается, если бы даже наросшие проценты начислялись каждую минуту, т.к. e = 2,7 используется в логарифмах как $\log_e x = \ln x$

.

Свойства логарифмической спирали нашло своё применение
и в архитектуре.

Рисунок 23.

Можно строить города по принципу двойной логарифмической спирали. Примером служит самая красивая и современная столица Казахстана – Астана. Можно построить совершенно новый мегаполис в нашей стране, с красивыми микрорайонами в виде спирали, где могут находиться здания в виде логарифмической спирали или крыши зданий спроектированные в виде спиралей.

Вывод: Многие природные явления не могли быть изучены без понятия логарифма;

Задание: 1. Сделать конспект теоретического материала.

2.Решить вариант А

ВАРИАНТ А

1. Вычислить: а) $\log_2 1/8$;

б) $\log_{1/2}\sqrt{2}/4$;

в) $\log 0{,}0001$;

г) $\log_4 32$;

д) $\ln e^{-3}$.

2. Упростить выражение:

а) $\log_2 18 + \log_2 3 - \log_2 27$;

б) $\log_3 6 + \log_3 16 + \log_3 8$;

в) $\log_6 14 + \log_6 3 - \log_6 7$;

г) $\log_{1/4} 8 - \log_{1/4} 3 + \log_{1/4} 24$;

д) $\log_3 16 - \log_3 48 + \log_3 27$.

3. Сравнить выражения:

а) $\log_{1/7} 9$ и $\log_{1/7} 10$;

б) $\log_5 13$ и $\log_5 15$;

в) $\log_8 11$ и $\log_3 10$;

г) $\lg\sqrt{7}$ и $\lg 3{,}5$;

д) $\lg 0{,}9$ и $\lg (0{,}9)^2$.

ВАРИАНТ В

1. Вычислить: а) $\log_3 36 / \log_3 6$;

б) $\log_2 \log_2 16$;

в) $2\log_2 6 - \log_2 9$;

г) $\log_{1/9} \sqrt[3]{3}/3$;

д) $\log_4 5 + \log_4 0{,}008 + \log_4 25$.

2. Упростить выражение: а) $5^{\log_5 3 - \log_2 8}$;

б) $6^{\log_5 0{,}2 + \log_6 15}$;

;

.

Практическая работа 12.2пм. Тема: Операции с множествами. (1 час)

Цель: Научить выполнять операции с множествами.

Материальное обеспечение: Практическая работа. Общие теоретические положения Основные понятия множества Определение 1.Множеством называется совокупность каких-либо объектов, обладающим общим для всех характеристическим свойством. Это определение нельзя считать строгим, так как понятие множества является исходным понятием математики и не может быть определено через другие математические объекты. Один из основателей теории множеств Г. Кантор определял множество так: "Множество есть многое, мыслимое как целое". Пример 1. Следующие совокупности объектов являются множествами: множество деревьев в лесу, множество целых чисел, множество корней уравнения е х sinx = 0.5. Всякое множество состоит из элементов. Множества обозначают большими буквами, например ,A. B, C, а элементы – маленькими буквами, например, a, b, c. Множество и его элементы обозначаются следующим образом: A = {a1, a2, a3} – множество, состоящее из трех элементов; A = {a1, a2, …} – множество, состоящее из бесконечного числа элементов. Множество может состоять из элементов, которые сами являются множествами. Нужно различать элемент a и множество, состоящее из единственного элемента a. Пример 2. Множество A = {1, 2} состоит из двух элементов 1, 2; но множество {A} состоит из одного элемента A. Если элемент a принадлежит множеству A, это записывается следующим образом: $a \in A$. Если элемент a не принадлежит множеству A, то записывают так: $a \notin A$. Пример 3. Пусть A1 – множество простых чисел, A2 – множество целых чисел, a = 4. Тогда $a \in A2$, $a \notin A1$. Если все элементы множества A являются элементами множества B и наоборот, т. е. множества A и B совпадают, то говорят, что A = B. Если каждый элемент множества A является элементом множества B, говорят, что множество A является подмножеством множества B, и записывают $A \subseteq B$ или $B \supseteq A$. Отметим, что по определению само множество A является своим подмножеством, т.е. $A \subseteq A$. Если $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$, то по ранее введенному определению A = B. Если $A \subseteq B$ и $A \neq B$, то A есть собственное подмножествоB, $A \subset B$. Если A не является собственным подмножеством B, то записывают $A \not\subset B$. Пример 4. Пусть A – множество четных чисел, B – множество целых чисел, C –множество нечетных чисел. Тогда $A \subset B$, $C \subset B$, $A \not\subset C$, $B \not\subset A$. Не надо смешивать отношение принадлежности ($\in$) и отношение включения ($\subseteq$). Пример 5. Пусть A = {2} – множество, состоящее из одного элемента, B = {{2}, {4}} – множество, состоящее из двух элементов, каждое из которых является одноэлементным множеством. Тогда имеют место следующие соотношения: $2 \in \{2\}$; $\{2\} \subset \{\{2\}, \{4\}\}$; $2 \notin \{\{2\}, \{4\}\}$. Множество, не содержащее ни одного элемента, называется пустым множеством и обозначается $\varnothing$. Принято считать, что пустое множество является подмножеством любого множества, $\varnothing \subseteq A$, где A – любое множество. Таким образом, всякое множество содержит в качестве своих подмножеств пустое множество и само себя. Пример 6. Множество корней уравнения sinx = 2 является пустым. Множество всех подмножеств данного множества A называется множеством-степенью и обозначается P(A). Множество P(A) состоит из 2n элементов (доказать самостоятельно). Пример 7. Пусть множество A = {1, 2} состоит из двух элементов 1, 2. Тогда множество P(A) включает в себя пустое множество $\varnothing$, два одноэлементных множества {1} и {2} и само множество A = {1, 2}, т. е. P(A) = {$\varnothing$, {1}, {2}, {1, 2}}. Мы видим, что множество P(A) состоит из четырех элементов (4 = 22). Существуют следующие способы задания множеств. 1. Перечислением элементов множества. Например, A = {1, 3, 5, 7, 9} – конечное множество; B = {1, 2, …, n, …} – бесконечное множество. 2. Указанием свойств элементов множества. Для этого способа пользуются следующим форматом записи: A = {a| указание свойства элементов}. Здесь a является элементом множества A, $a \in A$.Например, A = {a | a – простое число} – множество простых чисел; B = {b | b 2 – 1 = 0, b – действительное число} – множество, состоящее из двух элементов, B = {– 1, 1}; Z = {x | = 1}– множество, состоящее из одного числа, x = 0. Операции над множествами Рассмотрим основные операции над множествами. Объединением множеств A и B называется множество $A\cup B$, все элементы которого являются элементами хотя бы одного из множеств A или B: $A\cup B = \{x | x\in A$ или $x\in B\}$. Из определения следует, что $A\subseteq A\cup B$ и $B\subseteq A\cup B$. Аналогично определяется объединение нескольких множеств Пример 8. а) Пусть A = {4, 5, 6}, B = {2, 4, 6}. Тогда $A\cup B$ = {2, 4, 5, 6}. б) Пусть A – множество чисел, которые делятся на 2, а B – множество чисел, которые делятся на 3: A = {2, 4, 6, …}, B = {3, 6, 9, …}. Тогда $A\cup B$ множество чисел, которые делятся на 2 или на 3: $A\cup B$ = {2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, …}. Пересечением множеств A и B называется множество $A\cap B$, все элементы которого являются элементами обоих множеств A и B: $A\cap B = \{x | x\in A$ и $x\in B\}$. Из определения следует, что $A\cap B \subseteq A$, $A\cap B \subseteq B$ и $A\cap B \subseteq A\cup B$. Аналогично определяется пересечение нескольких множеств. Пример 9. Рассмотрим данные из примера 1.8. а) Пусть A = {4, 5, 6}, B = {2, 4, 6}. Тогда $A\cap B$ = {4, 6}. x sin x б) Пусть A – множество чисел, которые делятся на 2, а B – множество чисел, которые делятся на 3: A = {2, 4, 6, …}, B = {3, 6, 9, …}. Тогда $A\cap B$ множество чисел, которые делятся и на 2 и на 3: $A\cup B$ = {6, 12, 18, …}. Может оказаться, что множества не имеют ни одного общего элемента. Тогда говорят, что множества не пересекаются или что их пересечение – пустое множество. Пример 10. Пусть A = {1, 2}, B = {2, 3}, C = {3, 4}. Тогда $A\cap B\cap C =\varnothing$. Относительным дополнением множества B до множества A называется множество A \ B, все элементы которого являются элементами множества A, но не являются элементами множества B: $A \setminus B = \{x | x\in A$ и $x\notin B\}$. Пример 11. Рассмотрим данные из примера 1.8. а) A = {4, 5, 6}, B = {2, 4, 6}. A \ B = {4, 5}, B \ A= {2}. б) A = {2, 4, 6, …}, B = {3, 6, 9, …}. Тогда A \ B –множество чисел, которые делятся на 2, но не делятся на 3, а B \ A – множество чисел, которые делятся на 3, но не делятся на 2: A \ B = {2, 4, 8, 10, 14, …}. B \ A= {3, 9, 15, 21, 27, …}. Симметрической разностью множеств A и B называется множество A + B: $A + B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Пример 12. Рассмотрим данные из примера 1.11. а) A = {4, 5, 6}, B = {2, 4, 6}. A \ B = {4, 5}, B \ A= {2}, A + B = {2, 4, 5}. б) A = {2, 4, 6, …}, B = {3, 6, 9, …}, A \ B = {2, 4, 8, 10, 14, …}. B \ A= {3, 9, 15, 21, 27, …}, A + B = {2, 3, 4, 8, 9, …}. Универсальным множеством называется такое множество U, что все рассматриваемые в данной задаче множества являются его подмножествами. Абсолютным дополнением множества A называется множество всех таких элементов $x \in U$, которые не принадлежат множеству A: = U \ A. Пример 1.13. Пусть A – множество положительных четных чисел. Тогда U – множество всех натуральных чисел и - множество положительных нечетных чисел. Счетные множества Определение 1. Множество, эквивалентное множеству натуральных чисел N = {1, 2, 3, …, n,…}, называется счетным. Можно сказать также, что множество счетно, если его элементы можно перенумеровать. Пример . Следующие множества являются счетными.: 1. A1 = {–1, –2, …, – n, …}; 2. A2 = {2, 22 , …, 2n ,…}; 3. A3 = {2, 4, …, 2n,…}; 4. A4 = {…, – n, …, – 1, 0, 1, …, n,…}; Чтобы установить счетность некоторого множества, достаточно указать взаимно однозначное соответствие между элементами данного множества и множества натуральных чисел. Для примера 1.19 взаимно однозначное соответствие устанавливается по следующим A A A правилам: для множества A1: $-n \leftrightarrow n$; для множества A2: $2n\leftrightarrow n$; для множества A3: $2n\leftrightarrow n$; счетность множества A4 установлена в примере 1.19; Установить счетность множеств можно также, используя следующие теоремы о счетных множествах (приводятся без доказательств). Теорема 1. Всякое бесконечное подмножество счетного множества счетно. Пример . Множество A = {3, 6, …, 3n,…} счетно, т.к. A – бесконечное подмножество множества натуральных чисел, $A\subset N$. Теорема 2. Объединение конечной или счетной совокупности счетных множеств счетно. Пример. Множество A = {0, 1, …, n,…}

неотрицательных целых чисел счетно, множество B = {0, – 1, …, –n,…} неположительных целых чисел тоже счетно, поэтому множество всех целых чисел C = A∪B = {…, –n, …– 2, –1, 0, 1, 2, …, n, …} тоже счетно. Теорема 3. Множество всех рациональных чисел, т.е. чисел вида , где p и qцелые числа, счетно. Теорема 4. Если A = {a1, a2, …} и B = {b1, b2, …} – счетные множества, то множество всех пар C = {(ak, bn), k = 1, 2,…; n = 1, 2, …} счетно. Пример. Геометрический смысл пары (ak, bn) – точка на плоскости с рациональными координатами (ak, bn). Поэтому можно утверждать, что множество всех точек плоскости с рациональными координатами счетно. Теорема 5. Множество всех многочленов P(x) = a0 +a1x + a2x 2 + … + anx n любых степеней с рациональными коэффициентами a0,a1, a2, … an счетно.

Задание к работе: Вариант № 1 1. Фирма имеет 100 предприятий, причем каждое предприятие выпускает хотя бы одну продукцию вида А, В, С. Продукцию всех трех видов выпускают 10 предприятий, продукцию А и В – 18 предприятий, продукцию А и С – 15 предприятий, продукцию В и С – 21 предприятие. Число предприятий, выпускающих продукцию А равно числу предприятий, выпускающих продукцию В и равно числу предприятий, выпускающих продукцию С. Найти число всех предприятий. 2. Упростить: (A∪B) ∪(A∪B). 3. Является ли множество A = {1, 2, 3} подмножеством множества B = {{1}, {2, 3}}? Вариант № 2 1. В группе спортсменов 30 человек. Из них 20 занимаются плаванием, 18 – легкой атлетикой и 10 – лыжами. Плаванием и легкой атлетикой занимаются 11 человек, плаванием и лыжами – 8, (A∪ B) A B легкой атлетикой и лыжами – 6 человек. Сколько спортсменов занимаются всеми тремя видами спорта? 2. Упростить: A∩(A∪B). 3. В каком случае A A∩B? Вариант № 3 1. В студенческой группе 20 человек. Из них 10 имеют оценку “отлично” по английскому языку, 8 - по математике, 7 - по физике, 4 - по английскому языку и по математике, 5 - по английскому языку и по физике, 4 - по математике и по физике, 3 - по английскому языку, по математике и по физике. Сколько студентов группе не имеют отличных оценок? 2. Упростить: (A\B) ∪ (A\B). 3. Найти все подмножества множества A= {1, 2, 3, 4).

Порядок выполнения работы:

1. Изучить инструкцию к практической работе.
2. Выполнить задание.
3. Оформить отчет. Содержание отчета:
1) Тема. 2) Цель. 3) Материальное обеспечение.
4. Практическое задание.
Вопросы для самоконтроля:
1. Пусть a ∈A. Следует ли отсюда, что {a} A?
2. В каком случае A A∩B?
3. Назовите множество, которое является подмножеством любого множества.
4. Может ли быть множество эквивалентно своему подмножеству?

Практическая работа 13.3пм: «Вероятность в профессиональных задачах» (2 часа)

Цель работы: Разобрать методы решения задач и применить их при решении практических задач.

Теория вероятностей

Классическое определение вероятности

Вероятностью события А называется отношение числа благоприятных для А исходов к числу всех равновозможных исходов: **P (A) =** $\boldsymbol{\frac{m}{n}}$

где n — общее число равновозможных исходов, m — число исходов, благоприятствующих событию А.

Противоположные события

Событие, противоположное событию А, обозначают $\bar{A}$. При проведении испытания всегда происходит ровно одно из двух противоположных событий и

Объединение несовместных событий

Два события А и В называют несовместными, если отсутствуют исходы, благоприятствующие одновременно как событию А, так и событию В.

Если события А и В несовместны, то вероятность их объединения равна сумме вероятностей событий А и В: **P(A U B) =P(A) + P(B)**

Пересечение независимых событий

Два события А и В называют независимыми, если вероятность каждого из них не зависит от появления или непоявления другого события.

Событие С называют пересечением событий А и В (пишут С = А∩В), если событие С означает, что произошли оба события А и В.

Если события А и В независимы, то вероятность их пересечения равна произведению вероятностей событий А и В:

P(A∩B) = P(A) • P(B)

Формула сложения вероятностей совместных событий:

P(A U B) =P(A) + P(B) – P(A∩B)

1. Из 1000 собранных на заводе телевизоров 5 штук бракованных. Эксперт проверяет один наугад выбранный телевизор из этой 1000. Найдите вероятность того, что проверяемый телевизор окажется бракованным.

Решение. При выборе телевизора наугад возможны 1000 исходов, событию A «выбранный телевизор — бракованный» благоприятны 5 исходов. По определению вероятности P(A) = 5÷1000 = 0,005. Ответ: 0,005.

2. В урне 9 красных, 6 жёлтых и 5 зелёных шаров. Из урны наугад достают один шар. Какова вероятность того, что этот шар окажется жёлтым?

Решение. Общее число исходов равно числу шаров: 9 + 6 + 5 = 20. Число исходов, благоприятствующих данному событию, равно 6. Искомая вероятность равна 6÷20 = 0,3. Ответ: 0,3.

3. Петя, Вика, Катя, Игорь, Антон, Полина бросили жребий — кому начинать игру. Найдите вероятность того, что начинать игру должен будет мальчик.

Решение. Вероятность события равна отношению количества благоприятных случаев к количеству всех случаев. Благоприятными случаями являются 3 случая, когда игру начинает Петя, Игорь или Антон, а количество всех случаев 6. Поэтому искомое отношение равно 3:6=0,5. Ответ: 0,5.

4. В чемпионате мира участвуют 16 команд. С помощью жребия их нужно разделить на четыре группы по четыре команды в каждой. В ящике вперемешку лежат карточки с номерами групп: 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4. Капитаны команд тянут по одной карточке. Какова вероятность того, что команда России окажется во второй группе?

Решение: Обозначим через А событие «команда России во второй группе». Тогда количество благоприятных событий m = 4 (четыре карточки с номером 2), а общее число равновозможных событий n = 16 (16 карточек) по определению вероятности P= 4: 16 = 0,25. Ответ:0,25

5. В лыжных гонках участвуют 11 спортсменов из России, 6 спортсменов из Норвегии и 3 спортсмена из Швеции. Порядок, в котором спортсмены стартуют, определяется жребием. Найдите вероятность того, что первым будет стартовать спортсмен не из России.
Решение. Всего спортсменов 11 + 6 + 3 = 20 человек. Поэтому вероятность того, что первым будет стартовать спортсмен не из России равна 9:20 = 0,45. Ответ: 0,45.

6. На каждые 1000 электрических лампочек приходится 5 бракованных. Какова вероятность купить исправную лампочку?
Решение. На каждые 1000 лампочек приходится 5 бракованных, всего их 1005. Вероятность купить исправную лампочку будет равна доле исправных лампочек на каждые 1005 лампочек, то есть 1000:1005=0,995. Ответ: 0,995.

7. В группе туристов 8 человек. С помощью жребия они выбирают шестерых человек, которые должны идти в село в магазин за продуктами. Какова вероятность того, что турист Д., входящий в состав группы, пойдёт в магазин? *6 : 8=0,75.*

8. В чемпионате по футболу участвуют 16 команд, которые жеребьевкой распределяются на 4 группы: A, B, C и D. Какова вероятность того, что команда России не попадает в группу А?
Решение. Каждая команда попадет в группу с вероятностью 0,25. Таким образом, вероятность того, что команда не попадает в группу равна 1-0,25=0,75. Ответ: 0,75

9. **На турнир по шахматам прибыло 26 участников в том числе Коля и Толя. Для проведения жеребьевки первого тура участников случайным образом разбили на две группы по 13 человек. Найти вероятность того, что Коля и Толя попадут в разные группы.**

Решение. Всего 26 мест. Пусть Коля займет случайное место в любой группе. Останется 25 мест, из них в другой группе 13. Исходом считаем выбор места для Толи. Благоприятных исходов 13. P=13/25 = 0,52. Ответ: 0,52

10. В классе 16 учащихся, среди них два друга — Вадим и Сергей. Учащихся случайным образом разбивают на 4 равные группы. Найдите вероятность того, что Вадим и Сергей окажутся в одной группе.
Решение. Если Сергею первому досталось некоторое место, то Олегу остаётся 15 мест. Из них 3 — в той же группе, где Сергей. Искомая вероятность равна 3/15. Ответ: 0,2

11. В классе 21 учащийся, среди них два друга — Вадим и Олег. Класс случайным образом разбивают на 3 равные группы. Найдите вероятность того, что Вадим и Олег окажутся в одной группе.
Решение. Пусть один из друзей находится в некоторой группе. Вместе с ним в группе окажутся 6 человек из 20 оставшихся учащихся. Вероятность того, что друг окажется среди этих 6 человек, равна 6 : 20 = 0,3. Ответ: 0,3

12. Перед началом первого тура чемпионата по настольному теннису участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвует 16 спортсменов, среди которых 7 участников из России, в том числе Платон Карпов. Найдите вероятность того, что в первом туре Платон Карпов будет играть с каким-либо спортсменом из России? 6:15=0,4. *Ответ: 0,4.*

13. Перед началом первого тура чемпионата по шашкам участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвует 26 шашистов, среди которых 3 участника из России, в том числе Василий Лукин. Найдите вероятность того, что в первом туре Василий Лукин будет играть с каким-либо шашистом из России? *2: 25=0,08. Ответ: 0,08.*

14. В классе 26 учащихся, среди них два друга — Сергей и Андрей. Учащихся случайным образом разбивают на 2 равные группы. Найдите вероятность того, что Сергей и Андрей окажутся в одной группе. *Ответ 12 : 25 = 0,48.*

15. В классе 21 ученик, среди них 2 друга – Тоша и Гоша. На уроке физкультуры класс случайным образом разбивают на 3 равные группы. Найдите вероятность того, что Тоша и Гоша попали в одну группу. *Ответ 6 : 20 = 0,3.*

16. В классе 21 учащийся, среди них две подруги - Аня и Нина. Класс случайным образом делят на семь групп, по 3 человека в каждой. Найдите вероятность того, что Аня и Нина окажутся в одной группе. *Ответ: 2: 20 = 0,1.*

17. Механические часы с двенадцатичасовым циферблатом в какой-то момент сломались и перестали идти. Найдите вероятность того, что часовая стрелка остановилась, достигнув отметки 7, но не дойдя до отметки 1.
Ответ. 6 : 12= 0,5 (6 делений между 12 и 7, всего 12 делений)

18. Механические часы с двенадцатичасовым циферблатом в какой-то момент сломались и перестали ходить. Найдите вероятность того, что часовая стрелка застыла, достигнув отметки 6, но не дойдя до отметки 9 часов. 3:12 = 0,25

При решении задач с монетами число всех возможных исходов можно посчитать по формуле $n=2^a$, где a –количество бросков

19. В случайном эксперименте симметричную монету бросают 2 раза. Найдите вероятность того, что орел выпадет ровно 1 раз.
Решение. Всего возможны четыре исхода: решка-решка, решка-орёл, орёл-решка, орёл-орёл. Орёл выпадает ровно один раз в двух случаях, поэтому вероятность того, что орёл выпадет ровно один раз равна 2:4=0,5. Ответ: 0,5.

20. В случайном эксперименте симметричную монету бросают дважды. Найдите вероятность того, что орёл не выпадет ни разу. *Ответ: 1:4=0,25*

21. В случайном эксперименте симметричную монету бросают трижды. Найдите вероятность того, что орёл не выпадет ни разу. *Решение. 1:8=0,125 Ответ. 0,125*

22. В случайном эксперименте симметричную монету бросают четырежды. Найдите вероятность того, что орёл выпадет ровно 2 раза.
Решение. Составим список возможных вариантов. Бросают 2 раза может выпасть О - Орел, Р - Решка:
ОО, ОР, РО, РР. Всего 4 исхода из них только один случай удовлетворяет условию. Вероятность (Р) = 1 / 4 = 0.25. Ответ: 0.25

23. В случайном эксперименте симметричную монету бросают четырежды. Найдите вероятность того, что решка не выпадет ни разу.
Решение. Всего исходов 2^4 *= 16, благоприятных 1 (ОООО). 1:16 = 0,0625.* *Ответ: 0,0625*

При решении задач с кубиками число всех возможных исходов можно посчитать по формуле $n=6^a$***, где а –количество бросков***

24. Определите вероятность того, что при бросании игрального кубика (правильной кости) выпадет нечетное число очков.
Решение. При бросании кубика равновозможных шесть различных исходов. Событию "выпадет нечётное число очков" удовлетворяют три случая: когда на кубике выпадает 1, 3 или 5 очков. Поэтому вероятность того, что на кубике выпадет нечётное число очков равна 3:6=0,5. Ответ: 0,5.

25. Определите вероятность того, что при бросании кубика выпало число очков, не большее 3.
Решение. При бросании кубика равновозможны шесть различных исходов. Событию "выпадет не больше трёх очков" удовлетворяют три случая: когда на кубике выпадает 1, 2, или 3 очка. Поэтому вероятность того, что на кубике выпадет не больше трёх очков равна 3:6=0,5 Ответ: 0,5.

26. Игральную кость бросают дважды. Найдите вероятность того, что оба раза выпало число, большее 3.
Решение. При бросании кубика 6^2*= 36 различных исходов. Событию "выпадет больше трёх очков" удовлетворяют три случая: когда на кубике выпадает 4, 5, или 6 очков , благоприятных исходов 9 (4,4; 4,5; 4,6; 5,4; 5,5; 5,6; 6,4; 6,5; 6,6.) Ответ: 9: 36 = 0,25.*

27. В случайном эксперименте бросают три игральные кости. Найдите вероятность того, что в сумме выпадет 7 очков. Результат округлите до сотых.
Решение. При бросании кубика 6^3*= 216 различных исходов, благоприятных 14. 14 : 216 = 0,07. Ответ: 0,07.*

28. Коля выбирает трехзначное число. Найдите вероятность того, что оно делится на 5.
Решение. Всего трехзначных чисел 900. На пять делится каждое пятое их них, то есть таких чисел 900:5=180. Вероятность того, что Коля выбрал трехзначное число, делящееся на 5, определяется отношением количества трехзначных чисел, делящихся на 5, ко всему количеству трехзначных чисел: 180:900=0,2. Ответ: 0,2.

29.Для экзамена подготовили билеты с номерами от 1 до 50. Какова вероятность того, что наугад взятый учеником билет имеет однозначный номер?
Решение. Всего было подготовлено 50 билетов. Среди них 9 были однозначными. Таким образом, вероятность того, что наугад взятый учеником билет имеет однозначный номер равна 9:50=0,18. Ответ: 0,18.

30. В мешке содержатся жетоны с номерами от 5 до 54 включительно. Какова вероятность, того, что извлеченный наугад из мешка жетон содержит двузначное число?

Решение. Всего в мешке жетонов - 50. Среди них 45 имеют двузначный номер. Таким образом, вероятность, того, что извлеченный наугад из мешка жетон содержит двузначное число равна 45 : 50 = 0,9. *Ответ: 0.9.*

31. Какова вероятность того, что случайно выбранное натуральное число от 10 до 19 делится на 3? *3 : 10 = 0,3.* *Ответ: 0,3.*

Противоположные события.

32. Вероятность того, что новая шариковая ручка пишет плохо (или не пишет), равна 0,19. Покупатель в магазине выбирает одну такую ручку. Найдите вероятность того, что эта ручка пишет хорошо.
Решение. Вероятность того, что ручка пишет хорошо, равна 1 − 0,19 = 0,81. *Ответ: 0,81.*

33. Вероятность того, что в случайный момент времени температура тела здорового человека окажется ниже 36,8°С равна 0,87. Найдите вероятность того, что в случайный момент времени у здорового человека температура тела окажется 36,8°С или выше.
Ответ. 1-0,87=0,13

34. При изготовлении подшипников диаметром 67 мм вероятность того, что диаметр будет отличаться от заданного не больше, чем на 0,01 мм, равна 0,965. Найдите вероятность того, что случайный подшипник будет иметь диаметр меньше чем 66,99 мм или больше чем 67,01 мм.
Решение. По условию, диаметр подшипника будет лежать в пределах от 66,99 до 67,01 мм с вероятностью 0,965. Поэтому искомая вероятность противоположного события равна 1 − 0,965 = 0,035. *Ответ: 0,035.*

Несовместные и независимые события.

35. На экзамене по геометрии школьнику достаётся одна задача из сборника. Вероятность того, что эта задача по теме «Углы», равна 0,1. Вероятность того, что это окажется задача по теме «Параллелограмм», равна 0,6. В сборнике нет задач, которые одновременно относятся к этим двум темам. Найдите вероятность того, что на экзамене школьнику достанется задача по одной из этих двух тем.
Решение. Суммарная вероятность несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий: Р=0,6+ 0,1 = 0,7. *Ответ: 0,7.*

36. Вероятность того, что на тесте по биологии учащийся О. верно решит больше 11 задач, равна 0,67. Вероятность того, что О. верно решит больше 10 задач, равна 0,74. Найдите вероятность того, что О. верно решит ровно 11 задач.
Решение. Рассмотрим события A = «учащийся решит 11 задач» и В = «учащийся решит больше 11 задач». Их сумма — событие A + B = «учащийся решит больше 10 задач». События A и В несовместные, вероятность их суммы равна сумме вероятностей этих событий: P(A + B) = P(A) + P(B). Тогда, используя данные задачи, получаем: 0,74 = P(A) + 0,67, откуда P(A) = 0,74 − 0,67 = 0,07. *Ответ: 0,07.*

37. Вероятность того, что на тесте по химии учащийся П. верно решит больше 8 задач, равна 0,48. Вероятность того, что П. верно решит больше 7 задач, равна 0,54. Найдите вероятность того, что П. верно решит ровно 8 задач.
Решение. Вероятность решить несколько задач складывается из суммы вероятностей решить каждую из этих задач. Больше 8: решить 9-ю, 10-ю ... Больше 7: решить 8-ю, 9-ю, 10-ю ...Вероятность решить 8-ю = 0,54-0,48=0,06. *Ответ:0.06*

38. На клавиатуре телефона 10 цифр, от 0 до 9. Какова вероятность того, что случайно нажатая цифра будет меньше 4? *Ответ: 4 : 10 = 0,4.*

39. Биатлонист пять раз стреляет по мишеням. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,8. Найдите вероятность того, что биатлонист первые три раза попал в мишени, а последние два промахнулся. Результат округлите до сотых.
Решение. Поскольку биатлонист попадает в мишени с вероятностью 0,8, он промахивается с вероятностью 1 − 0,8 = 0,2. События попасть или промахнуться при каждом выстреле независимы, вероятность произведения независимых событий равна произведению их вероятностей. Тем самым, вероятность события «попал, попал, попал, промахнулся, промахнулся» равна 0,8•0,8•0,8•0,2•0,2=0,02048. Ответ:0.02048.

40. Помещение освещается фонарём с двумя лампами. Вероятность перегорания лампы в течение года равна 0,3. Найдите вероятность того, что в течение года хотя бы одна лампа не перегорит.
Решение. Найдем вероятность того, что перегорят обе лампы. Эти события независимые, вероятность их произведения равно произведению вероятностей этих событий: 0,3·0,3 = 0,09. Событие, состоящее в том, что не перегорит хотя бы одна лампа, противоположное. Следовательно, его вероятность равна 1 − 0,09 = 0,91. Ответ: 0,91.

41. Вероятность того, что батарейка бракованная, равна 0,06. Покупатель в магазине выбирает случайную упаковку, в которой две таких батарейки. Найдите вероятность того, что обе батарейки окажутся исправными.
Решение. Вероятность того, что батарейка исправна, равна 0,94. Вероятность произведения независимых событий (обе батарейки окажутся исправными) равна произведению вероятностей этих событий: 0,94·0,94 = 0,8836. Ответ: 0,8836.

42. Если гроссмейстер А. играет белыми, то он выигрывает у гроссмейстера Б. с вероятностью 0,52. Если А. играет черными, то А. выигрывает у Б. с вероятностью 0,3. Гроссмейстеры А. и Б. играют две партии, причем во второй партии меняют цвет фигур. Найдите вероятность того, что А. выиграет оба раза.
Решение. Возможность выиграть первую и вторую партию не зависят друг от друга. Вероятность произведения независимых событий равна произведению их вероятностей:
0,52 · 0,3 = 0,156. Ответ: 0,156.

43. В магазине три продавца. Каждый из них занят с клиентом с вероятностью 0,3. Найдите вероятность того, что в случайный момент времени все три продавца заняты одновременно (считайте, что клиенты заходят независимо друг от друга).
Решение. Вероятность произведения независимых событий равна произведению вероятностей этих событий. Поэтому вероятность того, что все три продавца заняты равна $(0,3)^3 = 0,027$. *Ответ: 0,027.*

44. Из районного центра в деревню ежедневно ходит автобус. Вероятность того, что в понедельник в автобусе окажется меньше 20 пассажиров, равна 0,94. Вероятность того, что окажется меньше 15 пассажиров, равна 0,56. Найдите вероятность того, что число пассажиров будет от 15 до 19.
Решение. Рассмотрим события A = «в автобусе меньше 15 пассажиров» и B = «в автобусе от 15 до 19 пассажиров». Их сумма — событие A + B = «в автобусе меньше 20 пассажиров». События A и B несовместные, вероятность их суммы равна сумме вероятностей этих событий: P(A + B) = P(A) + P(B).

Тогда, используя данные задачи, получаем: 0,94 = 0,56 + P(B), откуда P(B) = 0,94 − 0,56 = 0,38. <u>Ответ: 0,38.</u>

45. На экзамене по геометрии школьнику достаётся один вопрос из списка экзаменационных вопросов. Вероятность того, что это вопрос на тему «Вписанная окружность», равна 0,2. Вероятность того, что это вопрос на тему «Параллелограмм», равна 0,15. Вопросов, которые одновременно относятся к этим двум темам, нет. Найдите вероятность того, что на экзамене школьнику достанется вопрос по одной из этих двух тем.

Решение. Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий: 0,2 + 0,15 = 0,35. <u>Ответ: 0,35.</u>

46.Вероятность того, что новый электрический чайник прослужит больше года, равна 0,97. Вероятность того, что он прослужит больше двух лет, равна 0,89. Найдите вероятность того, что он прослужит меньше двух лет, но больше года.

Решение. Пусть A = «чайник прослужит больше года, но меньше двух лет», В = «чайник прослужит больше двух лет», С = «чайник прослужит ровно два года», тогда A + B + С = «чайник прослужит больше года». События A, В и С несовместные, вероятность их суммы равна сумме вероятностей этих событий. Вероятность события С, состоящего в том, что чайник выйдет из строя ровно через два года — строго в тот же день, час и секунду — равна нулю. Тогда: P(A + B+ C) = P(A) + P(B)+ P(C)= P(A) + P(B) откуда, используя данные из условия, получаем 0,97 = P(A) + 0,89.Тем самым, для искомой вероятности имеем: P(A) = 0,97 − 0,89 = 0,08. <u>Ответ: 0,08.</u>

47. В Волшебной стране бывает два типа погоды: хорошая и отличная, причём погода, установившись утром, держится неизменной весь день. Известно, что с вероятностью 0,8 погода завтра будет такой же, как и сегодня. Сегодня 3 июля, погода в Волшебной стране хорошая. Найдите вероятность того, что 6 июля в Волшебной стране будет отличная погода.

Решение. Для погоды на 4, 5 и 6 июля есть 4 варианта: ХХО, ХОО, ОХО, ООО (здесь Х — хорошая, О — отличная погода). Найдем вероятности наступления такой погоды: P(XXO) = 0,8·0,8·0,2 = 0,128; P(XOO) = 0,8·0,2·0,8 = 0,128; P(OXO) = 0,2·0,2·0,2 = 0,008; P(OOO) = 0,2·0,8·0,8 = 0,128.Указанные события несовместные, вероятность их суммы равна сумме вероятностей этих событий:

P(ХХО) + P(ХОО) + P(ОХО) + P(ООО) = 0,128 + 0,128 + 0,008 + 0,128 = 0,392. <u>Ответ: 0,392.</u>

48. В магазине стоят два платёжных автомата. Каждый из них может быть неисправен с вероятностью 0,05 независимо от другого автомата. Найдите вероятность того, что хотя бы один автомат исправен.

Решение. Найдем вероятность того, что неисправны оба автомата. Эти события независимые, вероятность их произведения равна произведению вероятностей этих событий: 0,05 · 0,05 = 0,0025. Событие, состоящее в том, что исправен хотя бы один автомат, противоположное. Следовательно, его вероятность равна 1 − 0,0025 = 0,9975.
<u>Ответ: 0,9975.</u>

49. В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в автомате закончится кофе, равна 0,3. Вероятность того, что кофе закончится в обоих автоматах, равна 0,12. Найдите вероятность того, что к концу дня кофе останется в обоих автоматах.

Решение. Рассмотрим событиеA = кофе закончится в первом автомате, B = кофе закончится во втором автомате.

Вероятность того, что кофе останется в первом автомате равна 1 − 0,3 = 0,7. Вероятность того, что кофе останется во втором автомате равна 1 − 0,3 = 0,7. Вероятность того, что кофе останется в первом или втором автомате равна 1 − 0,12 = 0,88. Поскольку P(A + B) = P(A) + P(B) − P(A·B), имеем: 0,88 = 0,7 + 0,7 − x, откуда искомая вероятность x = 0,52. Ответ: 0,9975.

50. Две фабрики выпускают одинаковые стекла для автомобильных фар. Первая фабрика выпускает 45% этих стекол, вторая — 55%. Первая фабрика выпускает 3% бракованных стекол, а вторая — 1%. Найдите вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло окажется бракованным.
Решение. Вероятность того, что стекло куплено на первой фабрике и оно бракованное: 0,45 · 0,03 = 0,0135. Вероятность того, что стекло куплено на второй фабрике и оно бракованное: 0,55 · 0,01 = 0,0055. Поэтому по формуле полной вероятности вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло окажется бракованным равна 0,0135 + 0,0055 = 0,019. Ответ: 0,019.

51. Ковбой Джон попадает в муху на стене с вероятностью 0,9, если стреляет из пристрелянного револьвера. Если Джон стреляет из непристрелянного револьвера, то он попадает в муху с вероятностью 0,2. На столе лежит 10 револьверов, из них только 4 пристрелянные. Ковбой Джон видит на стене муху, наудачу хватает первый попавшийся револьвер и стреляет в муху. Найдите вероятность того, что Джон промахнётся.
Решение. Джон попадает в муху, если схватит пристрелянный револьвер и попадет из него, или если схватит непристрелянный револьвер и попадает из него. По формуле условной вероятности, вероятности этих событий равны соответственно 0,4·0,9 = 0,36 и 0,6·0,2 = 0,12. Эти события несовместны, вероятность их суммы равна сумме вероятностей этих событий: 0,36 + 0,12 = 0,48. Событие, состоящее в том, что Джон промахнется, противоположное. Его вероятность равна 1 − 0,48 = 0,52. Ответ. 0,52

52. Чтобы поступить в институт на специальность «Лингвистика», абитуриент должен набрать на ЕГЭ не менее 70 баллов по каждому из трёх предметов — математика, русский язык и иностранный язык. Чтобы поступить на специальность «Коммерция», нужно набрать не менее 70 баллов по каждому из трёх предметов — математика, русский язык и обществознание.
Вероятность того, что абитуриент З. получит не менее 70 баллов по математике, равна 0,6, по русскому языку — 0,8, по иностранному языку — 0,7 и по обществознанию — 0,5.
Найдите вероятность того, что З. сможет поступить хотя бы на одну из двух упомянутых специальностей.
Решение. В силу независимости событий, вероятность успешно сдать экзамены на лингвистику: 0,6·0,8·0,7 = 0,336, вероятность успешно сдать экзамены на коммерцию: 0,6·0,8·0,5 = 0,24, вероятность успешно сдать экзамены и на «Лингвистику», и на «Коммерцию»: 0,6·0,8·0,7·0,5 = 0,168. Успешная сдача экзаменов на «Лингвистику» и на «Коммерцию» — события совместные, поэтому вероятность их суммы равна сумме вероятностей этих событий, уменьшенной на вероятность их произведения. Тем самым, поступить на одну из этих специальностей абитуриент может с вероятностью 0,336 + 0,24 − 0,168 = 0,408. Ответ: 0,408.

53. По отзывам покупателей Иван Иванович оценил надёжность двух интернет- магазинов. Вероятность того, что нужный товар доставят из магазина А, равна 0,8. Вероятность того, что этот товар доставят из магазина Б, равна 0,9. Иван Иванович заказал

товар сразу в обоих магазинах. Считая, что интернет-магазины работают независимо друг от друга, найдите вероятность того, что ни один магазин не доставит товар.
Решение. Вероятность того, что первый магазин не доставит товар равна 1 − 0,9 = 0,1. Вероятность того, что второй магазин не доставит товар равна 1 − 0,8 = 0,2. Поскольку эти события независимы, вероятность их произведения (оба магазина не доставят товар) равна произведению вероятностей этих событий: 0,1 · 0,2 = 0,02. Ответ: 0,02.

54. Перед началом волейбольного матча капитаны команд тянут честный жребий, чтобы определить, какая из команд начнёт игру с мячом. Команда «Статор» по очереди играет с командами «Ротор», «Мотор» и «Стартер». Найдите вероятность того, что «Статор» будет начинать только первую и последнюю игры. *Решение. Требуется найти вероятность произведения трех событий: «Статор» начинает первую игру, не начинает вторую игру, начинает третью игру. Вероятность произведения независимых событий равна произведению вероятностей этих событий. Вероятность каждого из них равна 0,5, откуда находим: 0,5·0,5·0,5 = 0,125. Ответ: 0,125.*

55. Всем пациентам с подозрением на гепатит делают анализ крови. Если анализ выявляет гепатит, то результат анализа называется *положительным*. У больных гепатитом пациентов анализ даёт положительный результат с вероятностью 0,9. Если пациент не болен гепатитом, то анализ может дать ложный положительный результат с вероятностью 0,01. Известно, что 5% пациентов, поступающих с подозрением на гепатит, действительно больны гепатитом. Найдите вероятность того, что результат анализа у пациента, поступившего в клинику с подозрением на гепатит, будет положительным.
Решение. Анализ пациента может быть положительным по двум причинам: А) пациент болеет гепатитом, его анализ верен; В) пациент не болеет гепатитом, его анализ ложен. Это несовместные события, вероятность их суммы равна сумме вероятностей этих событий. Имеем: Р(А)=0,9•0.05=0,045; Р(В)= 0,01•0,95=0,0095 ,Р(А+В)=Р(А)(В)=0,045+0,0095=0,0545. Ответ: 0,0545.

56. Автоматическая линия изготавливает батарейки. Вероятность того, что готовая батарейка неисправна, равна 0,02. Перед упаковкой каждая батарейка проходит систему контроля. Вероятность того, что система забракует неисправную батарейку, равна 0,99. Вероятность того, что система по ошибке забракует исправную батарейку, равна 0,01. Найдите вероятность того, что случайно выбранная батарейка будет забракована системой контроля.
Решение. Ситуация, при которой батарейка будет забракована, может сложиться в результате событий: А = батарейка действительно неисправна и забракована справедливо или В = батарейка исправна, но по ошибке забракована. Это несовместные события, вероятность их суммы равна сумме вероятностей эти событий. Имеем:
Р(А+В)=Р(А)+Р(В)=0,02•0,99+0,98•0,01=0,0198+0,0098=0,0296 Ответ: 0,0296.

57. Стрелок стреляет по мишени один раз. В случае промаха стрелок делает второй выстрел по той же мишени. Вероятность попасть в мишень при одном выстреле равна 0,7. Найдите вероятность того, что мишень будет поражена (либо первым, либо вторым выстрелом).
Решение. Пусть A — событие, состоящее в том, что мишень поражена стрелком с первого выстрела, B — событие, состоящее в том, что мишень поражена со второго выстрела. Вероятность события A равна P(A) = 0,7. Событие B наступает, если, стреляя первый раз, стрелок промахнулся, а, стреляя второй раз, попал. Это независимые события, их вероятность равна произведению вероятностей этих событий: P(B) = 0,3·0,7 = 0,21. События A и B несовместные, вероятность их суммы равна сумме вероятностей этих событий:
P (A + B) = P(A) + P(B) = 0,7 + 0,21 = 0,91. Ответ: 0,91.

58. Перед началом футбольного матча судья бросает монетку, чтобы определить, какая из команд будет первой владеть мячом. Команда *A* должна сыграть два матча — с командой *B* и с командой *C*. Найдите вероятность того, что в обоих матчах первой мячом будет владеть команда *A*.

Решение. Рассмотрим все возможные исходы жеребьёвки.

· КомандаA в матче в обоих матчах первой владеет мячом.

· КомандаA в матче в обоих матчах не владеет мячом первой.

· КомандаA в матче с командой B владеет мячом первой, а в матче с командой C — второй.

· КомандаA в матче с командой C владеет мячом первой, а в матче с командой B — второй.

Из четырех исходов один является благоприятным, вероятность его наступления равна 1:4=0,25. Ответ: 0,25.

59. Стрелок 4 раза стреляет по мишеням. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,5. Найдите вероятность того, что стрелок первые 3 раза попал в мишени, а последний раз промахнулся.

Решение. Вероятность промаха равна $1 - 0,5 = 0,5$. *Вероятность того, что стрелок первые три раза попал в мишени равна* $0,5^3 = 0,125$. *Откуда, вероятность события, при котором стрелок сначала три раза попадает в мишени, а четвёртый раз промахивается равна* $0,125 \cdot 0,5 = 0,0625$. *Ответ: 0,0625.*

60. Перед началом матча по футболу судья бросает монету, чтобы определить, какая из команд будет первой владеть мячом. Команда «Байкал» играет по очереди с командами «Амур», «Енисей», «Иртыш». Найти вероятность того, что команда «Байкал» будет первой владеть мячом только в игре с «Амуром».

Решение. Монету бросают 3 раза.

Для команды «Байкал» возможные исходы в трех бросках {О О О},{Р О О}, {О Р О}, {О О Р}, {Р Р О},{Р О Р}, {О Р Р},{Р Р Р}. Всего исходов 8, благоприятных (выпадение орла в первой игре) {О Р Р}

1:8=0,125. Ответ 0,125.

61. У Пети в кармане лежат шесть монет: четыре монеты по рублю и две монеты по два рубля. Петя, не глядя, переложил какие-то три монеты в другой карман. Найдите вероятность того, что теперь две двухрублевые монеты лежат в одном кармане.

Решение. Пронумеруем монеты: рублевые – 1, 2, 3, 4; двухрублевые – 5, 6. {123} {124} {125} {126} {134} {135} {136} {145} {146} {156} {234} {235} {236} {245} {246} {256} {345} {346} {356} {456}

n = 20 – число всех исходов .Взять три монеты можно так: (числа в порядке возрастания,чтобы не пропустить комбинацию) m = 8 – число благоприятных исходов

(комбинации, в которых монеты 5 и 6 (двухрублевые) не взяты или взяты обе. 8:20=0,4

Задание: 1. Разобрать методы решения задач. 2. Решить задачи с практическим содержанием:

1) Два автомобилиста, независимо друг от друга, выезжают из пункта А в пункт В. Навигатор предлагает каждому из них 8 равноценных маршрутов, и автомобилисты выбираю маршрут случайным образом. Найдите вероятность того, что автомобилисты выберут различные маршруты.

Ответ: 0,875.

2) Автомобильные номера состоят из трёх букв (в современных номерах используется 12 букв) и трёх цифр (используются все 10 цифр). Сколько автомобилей можно занумеровать таким образом в пределах одного региона, чтобы никакие два автомобиля не имели одинаковые номера?

Ответ: 1 728 272.

3) В ящике в случайном порядке разложены 25 деталей, причем 5 из них стандартные. Рабочий берет наугад 5 деталей. Найдите вероятность того, что из взятых наугад деталей 3 окажутся стандартными.

Практическая работа 13.6пм: «Составление таблиц и диаграмм на практике» (2 часа)

Цель работы: Первичная обработка статистических данных. Графическое их представление. Нахождение средних характеристик, наблюдаемых данных.

Тема «Составление диаграмм»

Мальчики Саша, Вася и Миша принимали участие в соревнованиях. Сравните результаты их выступлений и составьте диаграмму достижений каждого участника в каждом виде спорта. Укажите победителя, посчитав сумму мест.

	Прыжки в длину	Метание	Бег
Саша	20 дм	0,01 км	360 сек
Вася	198 см	800 см	4 мин 00 сек
Миша	1 м 9 дм	4 м 105 дм	0,1 ч

Тема «Построение диаграмм»

В таблице для некоторых городов показано годовое количество осадков (в мм). Постройте диаграмму, изображая 100 мм осадков столбиком высотой 1 см.

Москва	704	Нижний Тагил	678
Санкт -Петербург	1357	Сочи	1242
Омск	438	Красноуфимск	247
Челябинск	524	Владивосток	339

Тема «Построение диаграмм»

В таблице для некоторых городов показано годовое количество осадков (в мм). Постройте диаграмму, изображая 100 мм осадков столбиком высотой 1 см.

Москва	860	Воронеж	431
Санкт -Петербург	1078	Иркутск	1355
Тула	503	Нижний Новгород	417

Магнитогорск	620	Уфа	339

Тема «Построение диаграмм»

В таблице для некоторых городов показано годовое количество осадков (в мм). Постройте диаграмму, изображая 100 мм осадков столбиком высотой 1 см.

Москва	698	Пермь	402
Новосибирск	256	Краснодар	1206
Казань	722	Самара	496
Владимир	540	Красноярск	384

Задание: Определить литраж двигателя автомобиля ЗИЛ – 130.

Оборудование: Технические данные грузового автомобиля ЗИЛ – 130.

Ход работы.

1. Записать формулу для вычисления объема цилиндра.
2. Вычислить объем одного цилиндра, выразить его в литрах.
3. Вычислить объем всех цилиндров, выразить его в литрах.
4. Начертить и заполнить таблицу. Постройте диаграмму.

Число цилиндров, n	R, мм	H, мм	V_1, л	V, л

Тема: Вычисление объема параллелепипеда.

Задание: Сравнить вместимость кузовов автомобилей ЗИЛ–130 и ГАЗ-53.

Оборудование: Технические данные грузового автомобиля ЗИЛ–130, ГАЗ-53.

Ход работы.

1. Определить геометрическую форму кузова.
2. Выполнить чертеж кузова.
3. Записать формулу для определения объемов кузовов V_1 и V_2.
4. Записать данные о размерах кузовов.
5. Вычислить объем кузовов.
6. Сравнить результаты.

7. Занести данные в таблицу. Постройте диаграмму.

№ пп	a, м	b, м	c, м	V, $м^3$

Тема: Площадь поверхности призмы.

Задание: Определить количество материала, которое пойдет на облицовку смотровой ямы.

Оборудование: Рулетка.

Ход работы.

1. Определить геометрическую форму смотровой ямы.
2. Выполнить чертеж смотровой ямы.
3. Записать формулу для определения площади полной поверхности смотровой ямы $S_{пп}$.
4. Записать данные о размерах смотровой ямы.
5. Вычислить площадь полной поверхности смотровой ямы.
6. Занести данные в таблицу. Постройте диаграмму.

a, м	b, м	c, м	$S_{осн}$, $м^2$	$S_{бок}$, $м^2$	$S_{пп}$, $м^2$

Практическое занятие № 14.1 (1)

По теме: Равносильность уравнений и неравенств. Общие методы решения

Равносильны ли следующие уравнения:

1) $3x - 7 = 5x + 5$ и $2x + 12 = 0$
2) $\frac{1}{5}(2x - 1) = 1$ и $\frac{3x-1}{8} = 1$
3) $x^2 - 3x + 2 = 0$ и $x^2 + 3x + 2 = 0$
4) $(x - 5)^2 = 3(x - 5)$ и $x - 5 = 3$

Равносильны ли следующие неравенства:

5) $2x - 1 \geq 2$ и $2(x - 1) \geq 1$
6) $(x - 1)(x + 2) < 0$ и $x^2 + x < 2$
7) $(x - 2)(x + 1) < 3x + 3$ и $x - 2 < 3$
8) $x(x + 3) \geq 2x$ и $x^2(x + 3) \geq 2x^2$

Решить уравнение:

9) $\frac{x}{x+1} + \frac{2x}{x-1} = \frac{4x}{x^2-1}$
10) $\frac{x-1}{x-2} - \frac{2}{x} = \frac{1}{x-2}$

Решить неравенство:

11) $\frac{x+3}{2+x^2} < 3$

12) $\frac{x-2}{5-x} > 1$

Примечания:

7. На выполнение работы отводится 40 – 45 минут
8. За верно выполненные (6 – 8) заданий ставится оценка «удовлетворительно», за (9 – 10) оценка «хорошо», за (11 – 12) оценка «отлично»

Практическое занятие № 14.1 (2)

По теме: Равносильность уравнений и неравенств. Общие методы решения

Решить уравнение:

$(x^2+1)x = 5(x^2+1)$

$\log_2 x \cdot (x+1) = 0$

$4x - 5{,}5 = 5x - 3(2x - 1{,}5)$

$\frac{2x-1}{3} - \frac{2-x}{12} = \frac{x}{4}$

$\frac{x}{3} + \frac{x}{9} + \frac{x}{12} + \frac{x}{4} + \frac{x}{72} = 1$

$x(x-5) - (x-2)^2 = 13 + x$

$2x^2 - x - 6 = 0$

$-x^2 + 2x + 15 = 0$

$3x^2 - 7x - 40 = 0$

$\frac{(x-12)^2}{6} - \frac{x}{9} + \frac{x(x-9)}{18} = \frac{(x-14)^2}{2} + 5$

Примечания:

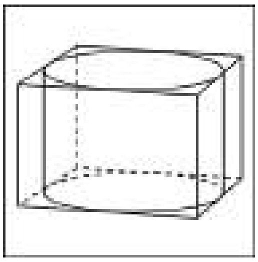
1. На выполнение работы отводится 40 – 45 минут
2. За верно выполненные (5 – 6) заданий ставится оценка «удовлетворительно», за (7 – 8) оценка «хорошо», за (9 – 10) оценка «отлично»

Практическая работа 7.15: Комбинация многогранников и тел вращения. (4 часа)

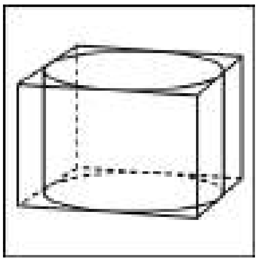
Цель: решать задачи по готовым чертежам.

Задачи с готовыми чертежами

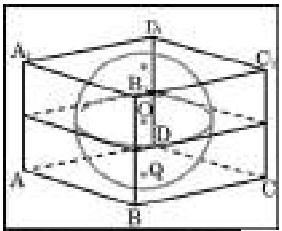
1. Прямоугольный параллелепипед описан около цилиндра, радиус основания и высота которого равны 1. Найдите объем параллелепипеда.



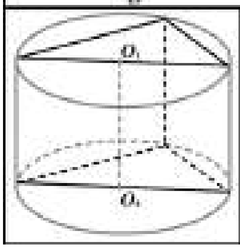
2. Прямоугольный параллелепипед описан около цилиндра, радиус основания которого равен 4. Объем параллелепипеда равен 16. Найдите высоту цилиндра.



3. Прямоугольный параллелепипед описан около сферы радиуса 1. Найдите его объем.

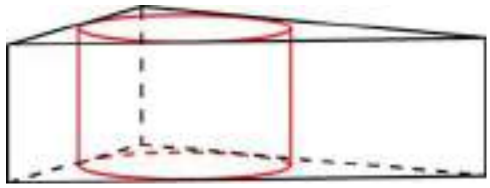


4. В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник с катетами 6 и 8. Боковые ребра равны 5/π . Найдите объем цилиндра, описанного около этой призмы.

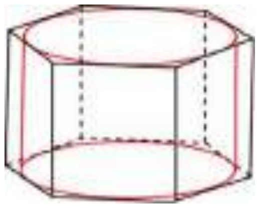


5. В основании прямой призмы лежит квадрат со стороной 2. Боковые ребра равны 2/ π. Найдите объем цилиндра, описанного около этой призмы.
6. Правильная четырехугольная призма описана около цилиндра, радиус основания и высота которого равны 1. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

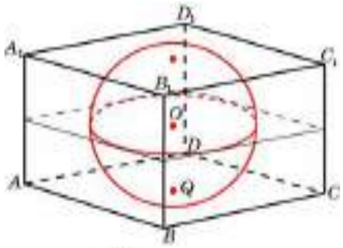
7. Найдите площадь боковой поверхности правильной треугольной призмы, описанной около цилиндра, радиус основания которого равен √3 , а высота равна 2.



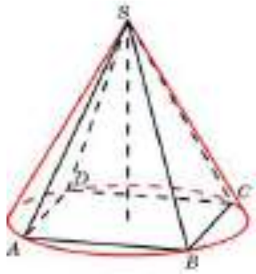
8. Найдите площадь боковой поверхности правильной шестиугольной призмы, описанной около цилиндра, радиус основания которого равен $\sqrt{3}$, а высота равна 2.



9. Прямоугольный параллелепипед описан около единичной сферы. Найдите его площадь поверхности.

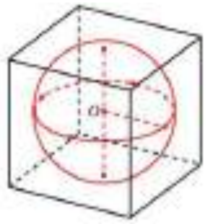


10. Конус описан около правильной четырехугольной пирамиды со стороной основания 4 и высотой 6. Найдите его объем, деленный на π.

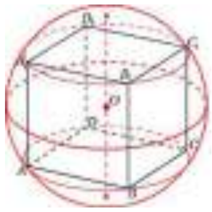


11. Во сколько раз объем конуса, описанного около правильной четырехугольной пирамиды, больше объема конуса, вписанного в эту пирамиду?

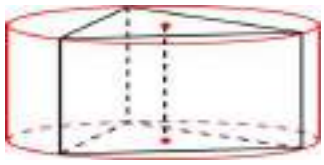
12. В куб с ребром 3 вписан шар. Найдите объем этого шара, деленный на π.



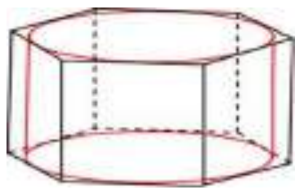
13. Около куба с ребром $\sqrt{3}$ описан шар. Найдите объем этого шара, деленный на π Найдите объем этого шара, деленный



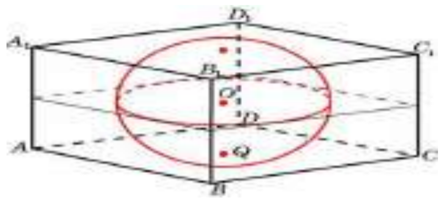
14. Найдите площадь боковой поверхности правильной треугольной призмы, вписанной в цилиндр, радиус основания которого равен $2\sqrt{3}$, а высота равна 2.



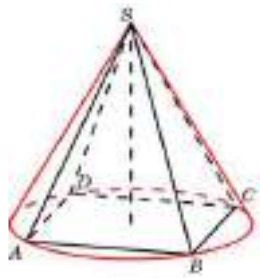
15. Найдите площадь боковой поверхности правильной шестиугольной призмы, описанной около цилиндра, радиус основания которого равен $\sqrt{3}$, а высота равна 2.



15. Прямоугольный параллелепипед описан около единичной сферы. Найдите его площадь поверхности.

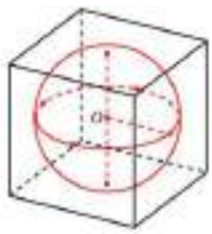


16. Конус описан около правильной четырехугольной пирамиды со стороной основания 4 и высотой 6. Найдите его объем, деленный на π.

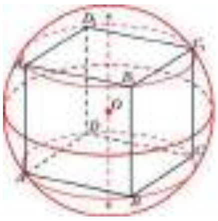


17. Во сколько раз объем конуса, описанного около правильной четырехугольной пирамиды, больше объема конуса, вписанного в эту пирамиду?

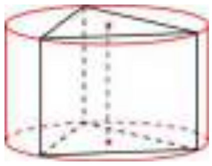
18. В куб с ребром 3 вписан шар. Найдите объем этого шара, деленный на π.



19. Около куба с ребром $\sqrt{3}$ описан шар. Найдите объем этого шара, деленный на π.



20. Найдите площадь боковой поверхности правильной треугольной призмы, вписанной в цилиндр, радиус основания которого равен $2\sqrt{3}$, а высота равна 2.



Практическая работа 14.5пм: «Составление и решение профессиональных задач с помощью уравнений. Решение тестовых задач профессионального содержания. (4 часа)

Цель: Решать текстовые задачи различными методами.

Схема решения задачи на составление уравнений

Перед решением задач необходимо провести анализ, который выполняется по схеме:

- Определение величин указанных в условии задачи.
- Установление зависимости между указанными величинами.
- Определение главного вопросу задачи.
- Обоснование выбора неизвестной величины (или величин).
- Выражение других величин задачи через неизвестную.
- Составление уравнения к задаче.
- Решение уравнений.
- Выяснение удовлетворяют ли найденные корни уравнения условие задачи.

Дать ответ на главный вопрос задачи

Решения к текстовым задачам на составление уравнений

Пример 1. Первый велосипедист ежеминутно проезжает на *50* метров меньше чем второй, поэтому на путь *120* км он тратит на *2* часа больше чем второй. Найти скорость второго велосипедиста (в км за час).

Решение: Задача для многих тяжела, но на самом деле все просто.
Под фразой "Проезжает ежеминутно на *50* метров меньше" спрятана скорость *50* м/мин.
Поскольку остальные данные в км и часах то *50* м/мин приводим к км/час.
$50/1000*60=3000/1000=3$ (*км/ч*).
Обозначим скорость второго велосипедиста через V, а время движения - t.
Умножением скорости на время движения получим путь
$V*t=120$.
Первый велосипедист едет медленнее, поэтому и дольше. Составляем соответствующее уравнение движения
$(V-3)(t+2)=120$.
Имеем систему двух уравнений с двумя неизвестными.
Из первого уравнения выразим время движения и подставим во второе
$t=120/V$; $(V-3)(120/V+2)=120$.
После умножения на $V/2$ и группировки подобных слагаемых можно получить такое квадратное уравнение

$V^2-3V-180=0$.
Вычисляем дискриминант уравнения

$D=9+4*180=729=27*27$
и корни

V=(3+27)/2=15;
V=(3-27)/2=-12.

Второй отвергаем, он не имеет физического смысла. Найденное значение *V = 15* км/час является скоростью второго велосипедиста.

Ответ: *15* км/час.

Пример 2. Морская вода содержит *5%* соли по массе. Сколько пресной воды надо добавить к *30* кг морской, чтобы концентрация соли уменьшилась на *70%*?

Решение: Найдем сколько соли в *30* кг морской воды

*30*5/100=1,5 (кг).*

В новом растворе это составит

(100%-70%)=30% от *5%*, составляем пропорции

5% – 100%

X– 30%.

Выполняем вычисления

*X=5*30/100=150/100=1,5%.*
Таким образом *1,5* кг соли соответствует *1,5%* в новом растворе. Опять складываем пропорции
1,5 – 1,5% Y – 100%.

Находим массу раствора морской воды

*Y=1,5*100/1,5=100 (кг).*

Вычтем масс соленой воды, чтобы найти количество пресной

100-30=70 (кг).

Ответ: *70 кг* пресной воды.

Пример 3. Автомобилист задержался у шлагбаума на *24* минуты. Увеличив после этого свою скорость на *10* километров в час он искупил опоздание на перегоне *80* км. Определить скорость мотоциклиста перед замедлением (в км в час).

Решение: Задача на составление уравнения на скорость. Обозначим начальную скорость мотоциклиста через V, а время за которое он должен был проехать через t. Есть две неизвестные, следовательно уравнений должно быть тоже *2*. Согласно условию, за это время он должен был проехать *80 км.*

$V*t=80$ *(км)*.

Задержался означает, что время уменьшилось на *24* минуты. Также стоит заметить, что в подобных задачах время нужно переводить в часы или минуты (в зависимости от условия) и тогда решать. Составляем уравнение движения с учетом меньшего времени и большей скорости

$(V+10)(t-24/60)=80.$

Есть два уравнения для определения времени и скорости. Поскольку в задачи спрашивают скорость, то выразим время из первого уравнения и подставим во второе

$t=80/V;$

$(V+10)(80/V-24/60)=80.$

Наша цель - научить Вас составлять уравнения к задачам, из которых можно определить искомые величины.

Поэтому не вдаваясь в детали, полученное уравнение умножением на $60 * V$ и делением на *24* может быть сведено к следующему квадратного уравнения

$V^2+10*V-2000=0.$

Самостоятельно найдите дискриминант и корни уравнения. Вы должны получить значение

$V=-50;$

$V=40.$

Первое значение отбрасываем, оно не имеет физического смысла. Второе $V = 40$ *км/час* является искомой скоростью мотоциклиста.

Ответ: *40 км/час.*

Пример 4. Товарный поезд задержался в пути на *12* минут, а затем на расстоянии *112* километров наверстал упущенное время, увеличив скорость на *10* км/час. Найти начальную скорость поезда (в км/час).

Решение: Имеем задачу в которой неизвестными выступают скорость поезда V и время движения t.

Поскольку задача по схеме уравнений соответствует предыдущей, то записываем два уравнения на неизвестные

$V*t=112;$

$(V+10)*(t-12/60)=112.$

Уравнения следует составлять именно в таких обозначениях. Это позволяет в простом виде выразить с первого уравнения время

$t =112/V$

и, подставив во второе получить уравнение только относительно скорости

$(V+10)*(112/ V -12/60)=112.$

Если неудачно выбрать обозначение, то можно получить уравнение на неизвестные такого плана

$V*(t+12)=112;$

$(V+10)*t=112.$

Здесь t соответствует времени после увеличения скорости на *10* км/ч, но суть не в этом. Приведенные уравнения тоже правильные, но не удобны с точки зрения вычислений. Попробуйте решить первые два уравнения и последние и Вы поймете, что второй схемы следует избегать при составлении уравнений. Поэтому хорошо обдумывайте, какие обозначения вводить , чтобы минимизировать количество вычислений.

Полученное уравнение

$(V+10)*(112/ V -12/60)=112.$

сводим к квадратному уравнению (умножаем на $60*V/12$)

$V^2+10*V-5600=0.$
Не вдаваясь в промежуточные вычисления, корнями будут

$V=-80;$
$V=70.$
В задачах такого типа всегда получим отрицательный корень ($V=-80$) который нужно отбросить. Скорость поезда равна *70* км/час.

Пример 5. Отправившись с автостанции на 10 минут позже, автобус ехал к первой остановки со скоростью на 16 км/час больше, чем по расписанию и приехал вовремя. Какую скорость (в км/час) должен иметь автобус по расписанию если расстояние от автостанции до первой остановки равно *16* километров?
Решение: Неизвестными выступают скорость автобуса V и время t.
Составляем уравнение, учитывая что время опоздания задано в минутах, а не часах
$V * t = 16$ - так должен был ехать автобус в обычном режиме;
$(V + 16) (t-10/60) = 16$ - уравнение движения из-за позднего отправления автобуса.
Есть два уравнения и две неизвестные.
С первого уравнения выразим время и подставим во второе
$t=16/V;$
$(V+16)(16/V-1/6)=16.$
Полученное уравнение относительно скорости сводим к квадратному $(*6*V)$
$V^2+16*V-1536=0.$
Корнями квадратного уравнения являются
$V=32; V=-48.$
Искомая скорость автобуса равна *32* км/час.
Ответ: *32* км/ч.

Пример 6. Водитель автомобиля остановился для замены колеса на *12* минут. После этого увеличив скорость движения на 15 км/час он искупил затраченное время на *60* километрах. С какой скоростью (в км/час) он двигался после остановки?
Решение: Алгоритм решения задачи несколько раз приводился в предыдущих примерах. Стандартно обозначаем скорость и время через V, t.
При составлении уравнения не забывайте перевести минуты в часы. Система уравнений будет иметь вид
$V*t=60;$
$(V+15)(t-12/60)=60.$
Дальнейшие манипуляции Вы также должны знать или заучить.
$t=60/V;$
$(V+15)(60/V -12/60)=60.$
Данное уравнение можно свести к квадратному уравнению
$V^2+15*V-4500=0.$
Решив квадратное уравнение, получим следующие значения скоростей
$V=60; V=-75.$
Скорость отрицательной не бывает, поэтому единственная правильный ответ $V=60$ км/час.

Пример 7. Некоторое двузначное число в *4* раза больше суммы и в *3* раза больше произведение своих цифр. Найти это число.
Решение: Задача на числа занимают важное место среди задач на составление уравнений и

бывают не менее интересными в построении решений чем задания на скорость. Все что нужно, это хорошо понять условие задачи. Обозначим число через ab, то есть число равно $10 * a + b$. По условию составим систему уравнений

$10*a+b=4*(a+b);$

$10*a+b=3*a*b.$

Поскольку в первое уравнение неизвестные входят линейно то его расписываем и выражаем одну из неизвестных через другую

$10*a+b-4*a-4*b=0;$

$6*a-3*b=0; b=2*a.$

Подставим $b = 2 * a$ во второе уравнение

$10*a+2*a=3*a*2*a;$

$6*a2-12*a=0; a(a-2)=0.$

Отсюда $a=0; a=2$. Первое значение нет смысла рассматривать, при $a=2$ вторая цифра равна $b=2*a=2*2=4$, а искомое число 24.

Ответ: число равно 24.

Пример 8. Два процессора ЭВМ, работая вместе обрабатывают данные за *8* секунд. Первый из них, работая сам может выполнить всю работу на *12* секунд быстрее другой, если тот будет работать отдельно. За сколько секунд выполнить эту работу второй процессор ЭВМ, работая самостоятельно?

Решение: Схема решения подобных задач непростая, однако на примерах усвоить методику и научиться может каждый. Обозначим работу процессоров в секунду времени через A и B, всю работу C. Слгдасно 1 условию задачи составим уравнение

$(A+B)*8=C.$

Дальше пусть второй B выполняет работу за t секунд, тогда первый A за $(t-12)$ секунд. Составляем, еще 2 уравнения

$A*(t-12)=C;$

$B*t=C.$

Имеем систему из трех уравнений с 4 неизвестными. Чтобы ее решить одна переменная должна входить в конечное уравнение линейным множителем. Поскольку нас интересует время, то выразим с 2 и 3 уравнения A и B и подставим в первое. В подобных задачах поступайте аналогичным образом

$B=C/t; A=C/(t-12).$

$C/t+C/(t-12)=C.$

Как видите общая работа входит в каждый слагаемое, ее выносим за скобки как общий множитель и упрощаем

$1/t+1/t-12=1.$

Это конечное уравнение относительно времени, которое нужно решить. После возведения к общему знаменателю и группировка слагаемых Вы получите квадратное уравнение

$t^2-28*t+96=0.$

Его решениями являются значения $t=4; t=24$. Первое время отвергаем, оно противоречит условию задачи.

Итак второй процессор ЭВМ выполнит работу за 24 секунды.

Решить самостоятельно следующие задачи:

- В процессе работы у техника- механика могут возникнуть ряд производственных задач с применением математического аппарата:
- 1. Индикаторная мощность ДВС на маховике 130 л. с. Чему равна эффективная мощность этого ДВС?
- 2. Определить максимальный крутящий момент на вторичном валу КПП, если этот момент на маховике равен 40, а передаточное число первой передачи – 8?
- 3. Плотность электролита полностью заряженной АКБ – 1,27 г/см 3 . При очередном ТО-2 показания амперметра – 1,22 г/см 3 . На сколько процентов разрядилась батарея и допускается ли ее эксплуатация в зимнее время?
- 4. Определить минимально безопасное расстояние до автомобиля, если ширина проезжей части, на которой он представляет опасность – 8 м, скорость автомобиля 60 км/ч (17 м/сек), скорость пешехода – 1 м/сек.
- 5. Определить безопасный интервал между движущимися в одном направлении автомобилями ЗИЛ и КамАЗ. Скорость автомобиля ЗИЛ – 60 км/ч, скорость автомобиля КамАЗ – 90 км/ч.
- 6. Установить остановочный путь автомобиля на сухом асфальтобетонном покрытии, если: время реакции водителя 0,8 с; время запаздывания срабатывания тормозного привода 0,1 с; время нарастания замедления 0,35 с; установившееся замедление 6,8 м/с 2; скорость движения автомобиля - 60 км/ч, коэффициент сцепления – 0,7.
- 7. Выдержит ли ледовая переправа грузовой автомобиль КАМАЗ-4310 массой 16000 кг, если толщина льда – 45 см?
- 8. Насколько увеличится объем двигателя автомобиля ЗИЛ (если ход поршня - 71 мм, диаметр цилиндра-76 мм, 4 цилиндра), если расточить его стенки на 2 мм?
- Рассмотрев типовые производственные задачи, можно сделать вывод, что автомеханик должен не только знать устройство автомобиля, но и владеть необходимыми математическими знаниями, которые помогут ему качественно решать, поставленную перед ним задачу.
- Ответственность автомеханика можно сравнить с ответственностью врача, потому что его ошибка в математических расчетах может привести к дорожной аварии с последствиями для жизни и здоровья людей.
- *Математика в профессии «Водитель категории «С»*
- Расход топлива. Водителю необходимо знать расход топлива автомобиля и рассчитать количество топлива на рейс. Например, трасса «Курск-Москва», расход автомобиля марки «Ман» 10л/100км., если Расстояние от Курска до Москвы – 830 км.
- Масса груза. Зная грузоподъемность автомобиля водитель рассчитывает массу груза. Например, на грузовой автомобиль марки «КАМАЗ» установлена бетономешалка, технические параметры которой указаны на рисунке. Определить можно ли замешивать и перевозить в этой бетономешалке особо тяжелый баритовый цемент, плотность которого 2500кг/м , если грузоподъемность «КАМАЗа» 17 тонн?
- Освещение дороги. Водитель должен рассчитывать с какой скоростью ехать по автомагистрали в ночное время. Например, на грузовом автомобиле «Маз», у которого ближний свет фар освещает 30-40м, со скоростью 90 км/ч ехать нельзя т.к. тормозной путь равен
- *Математика в профессии «Оператор заправочных станций»*
- Погрешность бензоколонки. Оператор заправочной станции обязан уметь вычислять сколько он недоливает или переливает горючего, например, на с каждых 300 л, если погрешность бензоколонки - 0,25% на 100л.

- Заполняемость резервуара. Резервуар заполняется на 95 %. Оператор рассчитывает, может ли бензовоз, например, объемом 4 куба слить топливо в резервуар, если в нем осталось 75% топлива, а объем резервуара 10 кубов.
- 1)10 куб : 95% = 0,1куб приходится на 1%
- 2)0,1куб х 95% = 9,5 куб топлива находится в резервуаре
- 3)0,1 куб х 75% = 7,5 куб топлива осталось в резервуаре
- 4)9,5 куб -7,5 куб = 2 куб можно долить в резервуар
- Ответ: 4 куба слить нельзя.
- Изучать связь между математикой и профессией «Автомеханик» можно бесконечно.

Задачи для обучения автомехаников.

1 Какой длины должен быть передаточный ремень, если диаметры шкивов равны соответственно 12 и 34 см, а расстояние между их центрами 1 м?

2 Бочку с бензином надо удержать на плоскости, наклоненной под углом 11°20'. Какая сила должна быть приложена к бочке в направлении, параллельном наклонной плоскости, если масса бочки с бензином составляет 1300 кг (силу трения не учитывать).

3.От шоссе, идущего к городу С, отходят две дороги: влево к пункту А и вправо к пункту В, образующие с осью шоссе угол 53° (шоссе и обе дороги прямолинейны). Перекресток дорог находится от города на расстоянии 4 км, а от пунктов А и В удален на 3 км. Вычислить кратчайшее расстояние от пункта А до города С и пункта В.

4. Две машины одновременно выходят из пункта А и движутся по двум прямолинейным дорогам, составляющим угол 35°: одна - со скоростью 1 км/мин и другая - 0,8 км/мин. На каком расстоянии друг от друга автомашины будут через 40 минут.

5.Плот сколочен из 42 балок прямоугольного сечения, каждая из которых имеет длину 10 м, ширину 20 см и толщину 15 см. Плотность дерева 0,6 г/см3. Можно ли на этом плоту переправить через реку грузовую машину массой 5 т? Измениться ли грузоподъемность плота, если ширина каждой балки будет уменьшена, а ее толщина одновременно увеличена на 1 см?

6. Размеры кузовов самосвалов МАЗ-205 и ЗИЛ-150 соответственно равны: 6,07; 2,64; 2,44 и 6,72; 2,39; 2,18 м. Какой самосвал имеет большую вместимость кузова?

7. Найти вместимость большегрузного транспортного прицепа высотой 1,5 м, у которого дно и верх - прямоугольники, размеры которых соответственно равны: 2 и 2,5; 2,8 и 3,5 м.

8. Бак в форме правильной четырехугольной пирамиды вмещает 190 л бензина. Найти глубину этого бака, если стороны оснований 60 и 40 см.

9. Смотровая яма в форме правильной четырехугольной пирамиды имеет объем 133 куб. м. Найти ее глубину, если сторона верхнего основания 9 м, а нижнего 4 м.

10. Сколько тонн топлива можно хранить в цистерне цилиндрической формы, если ее диаметр 5 м, длина 3 м? Плотность топлива 0,7 г/см3.

11. Какое количество нефти (в тоннах) вмещает цилиндрическая цистерна, диаметр которой 18 м и высота 7м, если плотность нефти 0,85 г/см3?

12. Уборочная машина СХМ-48 М имеет две пары барабанов, на каждом из которых расположены по окружности 18 стальных шпинделей круглого сечения, диаметром 18 мм и длиной 630 **мм.** Определить массу всех шпинделей, если плотность стали 7,8 г/см3.

13. Бак имеет форму цилиндра с горизонтальной осью. Будучи наполненным на У4 (по глубине), он вмещает 1,3 куб. м бензина. Определить полную вместимость бака.

14. Цилиндрический резервуар высотой 0,6 м наполнен бензином (плотность 0,7 г/см3). Найти радиус основания цилиндра, если в резервуар вмещается 8,4 кг бензина.

15. Сколько тонн бензина можно хранить в цистерне цилиндрической формы, если ее диаметр 5 м, длина 3 м, а плотность бензина 0,7 г/м?

16. Куча песка имеет форму конуса, окружность основания которого равна 25,12 м, а образующая -5м. Сколько машин вместимостью 3 т потребуется для его перевозки, если масса 1 куб. м составляет 2 т?

17. Хватит ли кучи песка конической формы для засыпки ямы формы усеченной пирамиды, если диаметр конуса 2 м, образующая 3 м, а стороны квадратных оснований пирамиды 0,5 м и 1 м, а высота 80 см?

18. Резервуар для бензина состоит их полушара диаметром 1,4 дм и цилиндра с таким же радиусом основания. Какой высоты должна быть цилиндрическая часть, чтобы весь резервуар мог вместить 1200 л?

19. Масса шагающего экскаватора 120 т. Во время работы он опирается на стальную цилиндрическую плиту (плотность 7,8 г/см3) высотой 1,2 м, причем давление на грунт составляет 75000 Па. Определить процент пустот в плите, если ее масса равна 120 т.

20. Рассчитать литраж двигателя автомобиля, если диаметр поршня 80 мм, а радиус кривошипа 45 мм.

.

Задачи на расход бензина:

1) Два грузовика выехали в рейс по взаимно перпендикулярным дорогам. Скорость одного – 50 км/ч, скорость другого – 60 км/ч. В данный момент они находятся на расстоянии 7 км и 10 км от начала пути. Через какое время расстояние между ними будет 35 км?

2) Во время поездки автомобиль на каждые 100 км пути тратит на 2 л бензина меньше, чем в городе. Водитель выехал с полным баком, проехал 120 км по городу и 210 км по загородному шоссе до заправки. Заправив машину, он обнаружил, что в бак вошло 42 л бензина. Сколько литров бензина расходует автомобиль на 100 км пробега в городе?

3) Автомеханик установил сначала 25% всех деталей машины при ремонте, потом 70% оставшихся деталей. После этого осталось ещё установить 27 деталей. Сколько всего деталей нужно было установить автомеханику?
Площади и объёмы

4) Определить объём кузова автомобиля ГАЗ-53, если его длина 3,8м, ширина – 2,6м, высота бортов 80 см. Как изменится объем кузова, если его борта «нарастить» вдвое?

5) Вычислить объём дизтоплива в цистерне диаметром 2м и длиной 3м, если она заполнена на 2/3 объёма.

6) Сколько брезента необходимо для пошива тента для кузова автомобиля формы прямоугольного параллелепипеда, имеющие размеры: 3 х 1,50 х 2 м?

7) Сколько понадобится арматуры для изготовления каркаса кузова для автомобиля КАМАЗ, имеющего форму прямоугольного параллелепипеда с измерениями: 2 х 1,5 х 2?

8) Чему равен суммарный рабочий объем в дм3 10 цилиндров двигателя ЯМЗ - 740 (КамАЗ), если диаметр одного цилиндра 120 мм., ход поршня 120 мм?
9) Подсчитайте суммарный рабочий объем в дм3 6 цилиндров двигателя ЯМЗ- 236, если диаметр цилиндра 130 мм, ход поршня 140 мм?
10) Найдите объем камеры сгорания двигателя автомобиля КРАЗ, если диаметр поршня 100 мм., ход поршня 150 мм?
11) На сколько увеличится объем камеры сгорания двигателя автомобиля ГАЗ -53, если диаметр поршня 10 см., ход поршня 9 см?
12) Размеры кузовов самосвалов МАЗ — 205 и КРАЗ соответственно равны (м): 6,07х2,64х2,44 и 6,72х2,39х2,18.
Какой из них более вместителен?
13) Вычислите полную поверхность клапана двигателя внутреннего сгорания ЯМЗ - 236, если высота его цилиндрической части 30 мм, высота всего клапана 45 мм, диаметр цилиндрической части 1 0 мм, диаметр тарелки клапана 30 мм.
14) Втулка сепаратора грузового устройства имеет форму цилиндра, высверленного по оси. Внешний диаметр втулки 20 мм, диаметр отверстия 12 мм, длина втулки 100 мм. Найдите площадь диагонального сечения втулки.

Практическое занятие № 14.6 (1)

По теме: Решение задач. Уравнения и неравенства

Решить уравнение:

$\boldsymbol{|x-3|=4}$

$\boldsymbol{|2x-7|=3-x}$

$|3x+5|=|2-x|$

$|16-9x|-|9x-5|=11$

$|3-x|-|x+1|=2x-3$

$|2x-3|=3-2x$

$|5x-13|-|6-5x|=7$

$x^2-4|x|-1=0$

Примечание:

1. На выполнение работы отводится 40 – 45 минут
2. За верно выполненные (4 – 5) заданий ставится оценка «удовлетворительно», за (6 – 7) оценка «хорошо», за 8 оценка «отлично»

Практическое занятие № 14.6 (2)

По теме: Решение задач. Уравнения и неравенства

Решить неравенство:

$|5x + 2| < 3$

$|x^2 - 2x| < 3$

$|1 - 2x| > 4$

$|x - 25| > -100$

$|3x - 2| < x - 1$

$3|x + 1| \geq x + 5$

$x^2 - |5x - 3| - x < 2$

$|x - 6| > |x^2 - 5x + 9|$

Примечание:

1. На выполнение работы отводится 40 – 45 минут
2. За верно выполненные (4 – 5) заданий ставится оценка «удовлетворительно», за (6 – 7) оценка «хорошо», за 8 оценка «отлично»